KUGELFUNKTIONEN

DR. JOSEF LENSE

LEIPZIG 1950
AKADEMISCHE VERLAGSGESELLSCHAFT
GEEST & PORTIG K.-G.

Druckfehlerberichtigung

Es muß heißen:

Seite 27 Zeile 4 von oben: $(\xi^2 - 1)^{\frac{m}{2}}$ statt $\xi^2 - 1^{\frac{m}{2}}$

Seite 219 Zeile 7 von unten: $\frac{1}{297}$ statt $\frac{1}{299}$

Seite 240 Zeile 11 von oben: Legendre statt Legender

Lense, Mathematik. A, Bd. 23.

MATHEMATIK
UND IHRE ANWENDUNGEN IN PHYSIK UND TECHNIK

HERAUSGEGEBEN VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

UND

A. KRATZER
MÜNSTER (WESTF.)

REIHE A

BAND 23

KUGELFUNKTIONEN

VON

JOSEF LENSE



LEIPZIG 1950
AKADEMISCHE VERLAGSGESELLSCHAFT
GEEST & PORTIG K.-G.

KUGELFUNKTIONEN

VON

DR. JOSEF LENSE
O. Ö. PROFESSOR AN DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE MÜNCHEN

MIT 51 ABBILDUNGEN



LEIPZIG 1950
AKADEMISCHE VERLAGSGESELLSCHAFT
GEEST & PORTIG K.-G.

PRINTED IN GERMANY
LIZENZ-NR. 194 – 1397/48 - 3274/48
DRUCK: (12) VVB LEICHTINDUSTRIE SACHS.-ANH., WERKDRUCK GRÄFENHAINICHEN - 60

Vorwort.

Es ist der Zweck des vorliegenden Buches, eine ausführliche Darstellung der Lehre von den Kugelfunktionen zu bringen. Dabei wird über den Stoff, der in den Lehrbüchern gewöhnlich geboten wird, hinausgegangen, jedoch soll das Werk kein „Handbuch“ sein, in dem man alles finden kann, was auf diesem Gebiet bis heute gearbeitet worden ist (wie z. B. die BESSELschen Funktionen in dem großen Werk von WATSON behandelt sind). An derartigen Handbüchern liegen das vor mehr als einem halben Jahrhundert erschienene Buch von HEINE und außerdem in neuerer Zeit das große Werk von HOBSON vor. Jenes ist veraltet und genügt nicht den Anforderungen der mathematischen Strenge, dieses ist sehr breit angelegt, aber an manchen Stellen infolge der vielen Fallunterscheidungen unübersichtlich. Ich habe mich daher zu einem Buch mittlerer Stärke entschlossen, um diese Lücke in der deutschsprachigen mathematischen Literatur auszufüllen. Es wendet sich nicht nur an mathematische Kreise, sondern auch an solche von Physik und Technik und behandelt, über die gewöhnliche Darstellung hinausgehend, nicht nur Kugelfunktionen von ganzzahligen Zeigern, sondern auch allgemein solche mit beliebigen komplexen Zeigern, deren Theorie hauptsächlich durch die Arbeiten von HOBSON gefördert wurde. Dementsprechend wird beim Leser die Kenntnis der Grundlehren der Funktionentheorie und Differentialgleichungen vorausgesetzt. Im einzelnen wäre folgendes zu sagen:

Das Buch ist in drei Abschnitte gegliedert. Der erste behandelt die Kugelfunktionen, deren Zeiger eine natürliche Zahl ist. Um späterer Anwendungen willen werden einleitend die Ausdrücke Divergenz, Gradient und Rotation für orthogonale krummlinige Koordinaten, insbesondere Kugelkoordinaten, hergeleitet. Die Begriffe selbst und ihre Haupteigenschaften werden selbstverständlich vorausgesetzt. Den Physikern und Ingenieuren weniger geläufige Sätze der Analysis, die in diesem Abschnitt verwendet werden und deren Beweis sich leicht einfügen ließ, wie zweiter Mittelwertsatz der Integralrechnung, Abelsches Reihenkriterium und Abelscher Grenzwertsatz, ein Satz über Konvergenz unendlicher Produkte

werden bewiesen. Zum Beweis des Satzes über die Entwicklung einer beliebigen Funktion nach LEGENDREschen Polynomen wird die asymptotische Darstellung dieser Funktionen gebraucht. Sie findet sich für beliebige Zeiger im zweiten Abschnitt. Der Leser hätte darauf verwiesen werden können, aber dann die ganze umfangreiche Theorie der Kugelfunktionen von beliebigen Zeigern verarbeiten müssen, um die Herleitung zu verstehen. Es wurden daher die asymptotischen Abschätzungen in der Fassung, wie sie für den Beweis des genannten Entwicklungssatzes notwendig ist, auf zwei Seiten vor den Beweis dieses Satzes eingeschoben. Dadurch wurde erreicht, daß der erste Abschnitt für sich allein gelesen werden kann. Nur ein einziges Mal wurde dieses Prinzip durchbrochen, als nämlich bei gewissen Abschätzungen die STIRLINGsche Formel benötigt wird, deren Herleitung im zweiten Abschnitt (im Kapitel über die Gammafunktion) zu finden ist, auf die demgemäß an der betreffenden Stelle verwiesen ist. Bei den am Schluß des ersten Abschnittes behandelten Randwertaufgaben für die Kugel werden einige Sätze der Potentialtheorie benützt, deren Herleitung natürlich zu weit führen würde und für die deshalb auf einschlägige Bücher hingewiesen ist. Dasselbe gilt von der Ziffer, in welcher der Zusammenhang der Kugelfunktionen mit den BESSELschen Funktionen besprochen wird.

Der zweite Abschnitt ist den Kugelfunktionen mit beliebigen komplexen Zeigern gewidmet. Hier sind genauere Kenntnisse aus der Theorie der Gamma- und hypergeometrischen Funktion erforderlich, die in zwei einleitenden Kapiteln behandelt werden. Die asymptotische Entwicklung der Kugelfunktionen wird nicht nur, wie im Handbuch von HOBSON für große reelle Werte des Zeigers, sondern um der Anwendungen willen auch für komplexe Werte des Zeigers von großem absolutem Betrag im Anschluß an eine Arbeit von WATSON durchgeführt. Das hierzu benötigte Sattelpunktverfahren wird nicht vorausgesetzt, sondern besprochen. Als Integrationswege treten dabei Kurven dritter Ordnung mit Doppelpunkt auf, zu deren Diskussion einige elementare Kenntnisse aus der analytischen projektiven Geometrie erforderlich sind. Das Schlußkapitel dieses Abschnittes behandelt das Additionstheorem der Kugelfunktionen. Hier konnte durch Benützung der Arbeiten von R. LAGRANGE eine weitgehende Vereinfachung gegenüber der Darstellung in dem Buch von HOBSON erzielt werden, in welchem das betreffende Kapitel wegen der vielen Fallunterscheidungen unübersichtlich und daher schwierig zu lesen ist. Zur Abkürzung von manchen Rechnungen wurden einige einfache Sätze aus der Invariantentheorie der binären Formen verwendet. Der Leser, dem diese Tatsachen nicht bekannt sind, kann sich von ihrer Richtigkeit durch eine

prinzipiell einfache, aber längere Rechnung überzeugen. Im ganzen Abschnitt wurde reichlich von der Integration im Komplexen Gebrauch gemacht. Da es sich dabei meist um mehrdeutige Funktionen handelt und erfahrungsgemäß dem Anfänger das Herausheben des richtigen Funktionszweiges die meiste Schwierigkeit macht, wurde auf diesen Punkt in der Darstellung immer genügend Rücksicht genommen.

Der dritte Abschnitt ist den Anwendungen gewidmet. Als solche kommen aus historischen Gründen in erster Linie die von LAPLACE, LEGENDRE und GAUSS behandelten Probleme der Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten von der Gestalt schwach abgeplatteter Sphäroide und des Erdmagnetismus in Betracht, die ja den ersten Anlaß zur Entwicklung der Lehre von den Kugelfunktionen gaben. Selbstverständlich mußten einige Kenntnisse aus der Mechanik vorausgesetzt werden. Hier konnten auch die Ergebnisse von CLAIRAUT und STOKES über das Erdsphäroid besprochen werden. Die Rechnung wird nur bis auf Glieder erster Ordnung in der Abplattung durchgeführt. Auf die Schwierigkeiten, die bei der Berechnung des Potentials des Sphäroids dadurch auftreten, daß die LEGENDREsche Entwicklung der reziproken Entfernung verwendet und dann das Ergebnis in Bereichen verwendet wird, für welche diese Entwicklung nicht mehr gilt, wird hingewiesen. WAVRE hat das Problem in einem Buch über Geodäsie von einer anderen Seite her angepackt und damit die genannten Schwierigkeiten überwunden. Auf diese Dinge konnte ich natürlich nicht eingehen, ohne den Rahmen des vorliegenden Buches weit zu überschreiten. An die Darstellung der GAUSSschen Arbeit über den Erdmagnetismus schließt sich naturgemäß die Entwicklung einer durch numerische Daten gegebenen Funktion nach Kugelfunktionen an. Diese für die Praxis wichtige Aufgabe, die von F. NEUMANN in besonders übersichtlicher Weise gelöst wurde, ist ausführlich behandelt. Sucht man die Aufgabe im Sinn der Methode der kleinsten Quadrate zu lösen, so kommt man auf eine noch nicht beantwortete Frage, auf die an der betreffenden Stelle hingewiesen ist. Darauf folgt die Anwendung der Kugelfunktionen bei Randwertproblemen auf einem Drehellipsoid, Ring (Torus), Drehkegel und einem von zwei Kugelhauben begrenzten Raumteil. Hier spielt die Ausdehnung der Betrachtung auf komplexe Zeiger eine besondere Rolle, sind doch die sogenannten Ringfunktionen nichts anderes als Kugelfunktionen mit gebrochenen Zeigern, die Kegelfunktionen solche mit imaginären Zeigern. Um auch eine Anwendung in der Theorie der elektromagnetischen Schwingungen zu besprechen, wurde das Problem der Ausbreitung der elektrischen Wellen um die Erdkugel gewählt. Es handelt sich dabei um eine besondere Lösung der MAXWELLschen Gleichungen unter bestimmten Randbedingungen. Hier

sind einige Kenntnisse aus der Theorie der BESSELschen Funktionen notwendig. Ich habe Leser, die darüber nicht verfügen, hierfür auf mein Buch über Reihenentwicklungen in der mathematischen Physik verwiesen. Auch bei diesem Problem führt die strenge Durchführung der Rechnung zu großen Schwierigkeiten, indem umfangreiche Abschätzungen notwendig wären, die bisher noch nicht geleistet wurden. Den Schluß des Buches bildet ein Kapitel über die sogenannten höheren Kugelfunktionen (GEGENBAUERsche Funktionen), die bei der Entwicklung einer Potenz der reziproken Entfernung und bei Fragen der Potentialtheorie in mehrdimensionalen Räumen auftreten. Sie wurden in neuester Zeit von SOMMERFELD in einem akustischen Problem benötigt.

Jeder Abschnitt ist in Paragraphen eingeteilt, jeder Paragraph in Ziffern. Diese sind im ganzen Abschnitt durchnumeriert, Formeln derselben Ziffer werden durch die Nummer zitiert, solche von anderen Ziffern durch Angabe von Ziffer und Nummer der Gleichung. Beziehen sie sich auf einen anderen Abschnitt, so wird auch dieser genannt. Es bedeutet also z. B. II, 10·2: Gleichung (2) von Ziffer 10 im Abschnitt II, dagegen I·47 Ziffer 47 im Abschnitt I.

Das Buch enthält keine Tafeln für Kugelfunktionen. Ich verweise in dieser Hinsicht auf die bekannten Tafeln von E. JAHNKE und F. EMDE, Tafeln höherer Funktionen, 4. Aufl., Leipzig 1948, B. G. Teubner, sowie von K. HAYASHI, Tafeln der BESSELschen, Theta-, Kugel- und anderen Funktionen und, von demselben Verfasser, Fünfstellige Funktionentafeln, beide erschienen bei J. Springer, Berlin 1930.

Meine Frau hat die Reinschrift des Manuskriptes besorgt, Herr Dr. F. WENZL das Manuskript gelesen und mich mit manchen Ratschlägen unterstützt. Das Gleiche gilt von Herrn Dr. E. LEHR, der außerdem die Abbildungen gezeichnet hat. Die Korrekturen wurden von den Herren Dr. A. HAUG, Dipl.-Phys. H. HOCHMUTH und meiner Frau mitgelesen. Ihnen allen spreche ich meinen herzlichen Dank für ihre Hilfe aus, ebenso dem Verlag, der alle meine Wünsche bei der Herausgabe des Buches bereitwillig erfüllte.

München, im Juni 1949.

J. Lense.

Inhaltsverzeichnis.

I. Abschnitt.

Kugelfunktionen mit ganzzahligen Zeigern.

§ 1. Räumliche Kugelfunktionen.

§ 2. Zonale Kugelfunktionen.

§ 3. Zugeordnete Kugelfunktionen.

§ 4. Reihenentwicklungen nach Legendreschen Polynomen.

§ 5. Legendresche Funktionen zweiter Art.

§ 6. Kugelflächenfunktionen.

§ 7. Reihenentwicklungen nach Laplaceschen Kugelfunktionen.

II. Abschnitt.

Kugelfunktionen mit beliebigen Zeigern.

§ 1. Gammafunktion.

§ 2. Hypergeometrische Differentialgleichung.

§ 3. Kugelfunktionen mit beliebigen Zeigern.

§ 4. Asymptotische Entwicklungen.

§ 5. Additionstheorem.

III. Abschnitt.

Anwendungen der Kugelfunktionen.

§ 1. Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeitsmassen, Anziehung der Sphäroide.

§ 2. Erdmagnetismus, Entwicklung einer durch Beobachtungen gegebenen Funktion nach Kugelfunktionen.

§ 3. Dreifach orthogonale Flächensysteme, besondere Lösungen der Laplaceschen Differentialgleichung.

§ 4. Elektromagnetische Schwingungen.

§ 5. Höhere Kugelfunktionen.

I. Kugelfunktionen mit ganzzahligen Zeigern.

§ 1. Räumliche Kugelfunktionen.

1. Potentialfunktionen. Laplacesche Differentialgleichung. Randwertaufgaben. Es seien x, y, z rechtwinklige räumliche Koordinaten. $V(x, y, z)$ sei eine in einem bestimmten Gebiet des Raumes definierte reelle Funktion und samt ihren Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetig. Sie möge ferner in diesem Gebiet der sogenannten LAPLACEschen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \tag{1}$$

genügen. Eine solche Funktion nennen wir eine harmonische Funktion oder Potentialfunktion des betreffenden Gebietes; der Name rührt daher, daß das Potential einer Massenbelegung in jedem massenfreien Raumpunkt die eben genannten Eigenschaften hat. Für die linke Seite der Gleichung (1) schreiben wir wie üblich ΔV und nennen ΔV den LAPLACEschen Operator.

In der Potentialtheorie sucht man Potentialfunktionen zu bestimmen, die auf der Begrenzungsfläche des betrachteten Gebietes gewissen Bedingungen genügen. Die wichtigsten Arten dieser Bedingungen sind folgende:

a) Man schreibt die Werte von V in jedem Punkt der Begrenzung vor (erste Randwertaufgabe oder DIRICHLETsches Problem, Hauptaufgabe in der Lehre ruhender elektrischer Ladungen).

b) Man verlangt, daß $\frac{\partial V}{\partial n}$ (n äußere Normale der Begrenzungsfläche) in jedem Punkt der Berandung einen gegebenen Wert annehme (zweite Randwertaufgabe oder NEUMANNsches Problem, Hauptaufgabe in der Lehre bewegter Flüssigkeiten).

c) $kV + h\frac{\partial V}{\partial n}$ soll einen vorgeschriebenen Wert in jedem Punkt der Begrenzungsflächen haben, wenn h und k als Ortsfunktionen auf diesen gegeben sind (dritte Randwertaufgabe, umfaßt die beiden ersten als besondere Fälle, Hauptaufgabe der Wärmeleitung).

Im folgenden werden wir besonders Gebiete mit kugelförmiger Berandung behandeln.

2. Dreifach orthogonale Flächensysteme. Bei einem Gebiet mit kugelförmigen Berandungen wird man zweckmäßig statt der rechtwinkligen Koordinaten x, y, z Kugelkoordinaten (räumliche Polarkoordinaten) r, ϑ, φ verwenden. Sie hängen mit den rechtwinkligen Koordinaten durch die Formeln

$$(1)\qquad \begin{cases} x = r \sin\vartheta \cos\varphi \\ y = r \sin\vartheta \sin\varphi \\ z = r \cos\vartheta \end{cases}$$

zusammen (Abb. 1). Schließen wir die z-Achse aus und beschränken wir r, ϑ, φ durch die Ungleichungen $0 < r,\ 0 < \vartheta < \pi,\ 0 \leq \varphi < 2\pi$, so entspricht jedem reellen Wertesystem x, y, z umkehrbar eindeutig ein reelles Wertesystem r, ϑ, φ dieses Bereiches. In mehr geometrischer Weise können wir diesen Sachverhalt so aussprechen: In rechtwinkligen Koordinaten ist ein Punkt P als Schnittpunkt der drei Ebenen $x = \text{const}$, $y = \text{const}$, $z = \text{const}$ gegeben, in Kugelkoordinaten als Schnittpunkt der Flächen $r = \text{const}$, $\vartheta = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$. In beiden Fällen durchsetzen einander die Flächen senkrecht, als deren Schnittpunkt der betreffende Punkt auftritt.

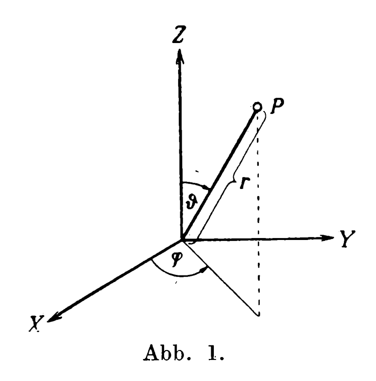


Abb. 1.

Im folgenden wollen wir statt x, y, z lieber x_1, x_2, x_3 schreiben. Die Zeiger μ und ν sollen immer die Werte 1, 2, 3 durchlaufen. Es liegt nun nahe, jedem Punkt eines Bereiches B als Schnittpunkt von drei beliebigen, einander senkrecht durchsetzenden Flächen

$$(2)\qquad f_\nu(x_1, x_2, x_3) = h_\nu \qquad (h_\nu = \text{const})$$

festzulegen. Drei solche Flächenscharen nennt man ein dreifach orthogonales Flächensystem. In dem Bereich B, den wir der Betrachtung zugrunde legen, sollen die Funktionen f_ν samt ihren Ableitungen erster Ordnung stetig sein. Die f_ν nennen wir dann kurz stetig differenzierbar. Durch jeden Punkt von B möge genau eine Fläche aus jeder der drei Scharen gehen, und drei Flächen aus je einer der drei Scharen sollen sich gerade in einem Punkt schneiden. Dann entspricht jedem reellen Wertesystem x_1, x_2, x_3 des Bereiches B umkehrbar eindeutig ein reelles Wertesystem h_1, h_2, h_3 aus einem Bereich B'. Das Zahlentripel (h_1, h_2, h_3)

bezeichnet man als krummlinige orthogonale Koordinaten des Punktes (x_1, x_2, x_3). Es sind also die x_ν in B' Funktionen der h_ν:

$$x_\nu = \varphi_\nu\,(h_1, h_2, h_3)\,. \tag{3}$$

Ist die Funktionaldeterminante $\frac{\partial(f_1, f_2, f_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} \neq 0$ in B, so sind die φ_ν samt ihren Ableitungen erster Ordnung in B' stetig.

Wir haben nun die Bedingung aufzustellen, daß sich die Flächen in jedem Punkt senkrecht durchsetzen. Wir schreiben zur Abkürzung

$$H_\nu = \sqrt{\sum_{\mu=1}^{3}\left(\frac{\partial f_\nu}{\partial x_\mu}\right)^2} \tag{4}$$

und setzen $H_\nu \neq 0$ voraus. Die Richtungskosinus der Normalen n der Fläche h_ν, d. h. in der durch die Gleichung (2) gegebenen Fläche, im Punkt P sind $\frac{1}{H_\nu}\frac{\partial f_\nu}{\partial x_\mu}$ $(\mu = 1, 2, 3)$. Dadurch, daß wir die Quadratwurzel in H_ν positiv ausgezogen haben, ist die Normale mit einem bestimmten Durchlaufungssinn versehen. Differenziert man $f_\nu(x_1, x_2, x_3)$ in dieser Richtung, so erhält man nach (4)

$$\frac{\partial f_\nu}{\partial n} = \sum_{\mu=1}^{3}\frac{\partial f_\nu}{\partial x_\mu}\left(\frac{1}{H_\nu}\frac{\partial f_\nu}{\partial x_\mu}\right) = H_\nu > 0\,,$$

d. h. durchsetzt man die Flächenschar (2) senkrecht in der angegebenen Richtung, so nimmt h_ν zu. Die Flächen h_μ und h_ν stehen aufeinander senkrecht, wenn

$$\sum_{\lambda=1}^{3}\frac{\partial f_\mu}{\partial x_\lambda}\frac{\partial f_\nu}{\partial x_\lambda} = 0 \qquad (\mu \neq \nu) \tag{5}$$

ist.

Beachten wir nun folgendes: x_ν ist nach (3) stetig differenzierbare Funktion der h_ν, diese sind nach (2) selbst stetig differenzierbare Funktionen der x_ν; x_ν ist infolgedessen vermittels der h_ν stetig differenzierbare Funktion von x_1, x_2, x_3. Führen wir noch zur Abkürzung

$$\delta_{\mu\nu} = \begin{cases} 0 & \text{für } \mu \neq \nu \\ 1 & \text{,, } \mu = \nu \end{cases}$$

ein, so ist nach (2) und (3)

$$\frac{\partial x_\mu}{\partial x_\nu} = \sum_{\lambda=1}^{3}\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial h_\lambda}\frac{\partial f_\lambda}{\partial x_\nu} = \delta_{\mu\nu}\,. \tag{6}$$

Wir halten in diesen Gleichungen μ fest, multiplizieren sie der Reihe nach mit $\frac{\partial f_\varrho}{\partial x_\nu}$ $(\nu = 1, 2, 3)$ und addieren sie hierauf. Dann folgt nach (4) und (5)

$$\frac{\partial f_\varrho}{\partial x_\mu} = H_\varrho^2\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial h_\varrho} \qquad (\mu, \varrho = 1, 2, 3). \tag{7}$$

Aus den Gleichungen (6) erhalten wir mit Hilfe des Multiplikationssatzes

der Determinanten außerdem die Beziehung

$$\frac{\partial(f_1, f_2, f_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)}{\partial(h_1, h_2, h_3)} = 1 . \tag{8}$$

Wir berechnen noch das Bogenelement in den krummlinigen Koordinaten. Mit Hilfe von (3), (7), (5) und (4) ergibt sich für sein Quadrat

$$ds^2 = \sum_{\lambda=1}^{3} dx_\lambda^2 = \sum_{\lambda, \nu=1}^{3} \left(\frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial h_\nu} dh_\nu\right)^2 = \sum_{\lambda, \mu, \nu=1}^{3} \frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial h_\mu} \frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial h_\nu} dh_\mu \, dh_\nu \tag{9}$$

$$= \sum_{\lambda, \mu, \nu=1}^{3} \frac{1}{H_\mu^2 H_\nu^2} \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\lambda} \frac{\partial f_\nu}{\partial x_\lambda} dh_\mu \, dh_\nu = \sum_{\nu=1}^{3} \left(\frac{dh_\nu}{H_\nu}\right)^2 .$$

Für Kugelkoordinaten erhält man in bekannter Weise aus den Formeln (1)

$$ds^2 = dr^2 + r^2 \, d\vartheta^2 + r^2 \sin^2\vartheta \, d\varphi^2$$

und daraus gemäß (4) mit $h_1 = r$, $h_2 = \vartheta$, $h_3 = \varphi$

$$H_1 = 1, \quad H_2 = \frac{1}{r}, \quad H_3 = \frac{1}{r \sin\vartheta} . \tag{10}$$

3. Divergenz. Wir wollen jetzt dazu übergehen, die Grundbegriffe der Vektoranalysis, Divergenz, Gradient, Rotation[1]) in unsere krummlinigen Koordinaten h_1, h_2, h_3 umzurechnen. Es sei ein Vektorfeld $\mathfrak{v}$ gegeben. Der Vektor $\mathfrak{v}$ habe stetige Komponenten; ebenso sollen alle im folgenden auftretenden Ableitungen seiner Komponenten stetig sein. Die Divergenz von $\mathfrak{v}$ in einem bestimmten Punkt P kann man in folgender Weise definieren:

P liege in einem Bereich, dessen Rauminhalt mit B bezeichnet werde. Der Einheitsvektor $\mathfrak{n}$ möge die nach außen gerichtete Normale der Oberfläche dieses Bereiches bedeuten. Dann ist

$$\operatorname{div} \mathfrak{v} = \lim_{B \to P} \frac{1}{B} \int (\mathfrak{v}\mathfrak{n}) \, d\sigma ,$$

wobei das Integral über die Oberfläche des Bereiches zu erstrecken und der Grenzübergang so auszuführen ist, daß man den Bereich stetig auf den Punkt P zusammenzieht. Der Grenzwert ist unabhängig von dem verwendeten Hilfsbereich B, die Definition unabhängig vom Koordinatensystem.

P sei der Schnittpunkt der Flächen $\bar{h}_1$, $\bar{h}_2$, $\bar{h}_3$. Als Bereich wählen wir nach einem Gedankengang von B. Riemann und W. Thomson[2]) den von den sechs Flächen.

$$f_\nu(x_1, x_2, x_3) = \bar{h}_\nu, \quad f_\nu(x_1, x_2, x_3) = \bar{h}_\nu + \delta h_\nu \qquad (\nu = 1, 2, 3)$$

---

[1] In bezug auf die im folgenden benutzten Begriffe und Sätze der Vektorrechnung vgl. z. B. J. Lense, Vorlesungen über höhere Mathematik, München 1948, Leibniz-Verlag, Ziffer 80—83.

[2]) B. Riemann, Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen, herausgegeben von Hattendorf, 1869; W. Thomson (Lord Kelvin), Cambridge Math. Journal, 4 (1845) 36.

begrenzten, würfelartigen Bereich. Einer seiner Eckpunkte fällt mit P zusammen. Die δh_ν sollen positive reelle Zahlen bedeuten, die wir dann bei dem Grenzübergang gegen Null streben lassen. Zu jedem Punkt (x_1, x_2, x_3) der Fläche $\bar{h}_\nu$ gehört ein Vektor $\mathfrak{v}$; die senkrecht zu dieser Fläche stehende Komponente sei mit v_ν bezeichnet.

Wir haben nun $\int (\mathfrak{v}\,\mathfrak{n})\, d\sigma$, erstreckt über die sechs Begrenzungsflächen unseres krummflächigen Würfels, zu berechnen. Wir erstrecken das Integral zuerst über die Begrenzungsfläche $f_1(x_1, x_2, x_3) = \bar{h}_1$. Auf ihr ist h_1 konstant, das Quadrat des Bogenelementes daher nach (2·9) $ds^2 = \left(\frac{dh_2}{H_2}\right)^2 + \left(\frac{dh_3}{H_3}\right)^2$, das Oberflächenelement somit $d\sigma = \frac{dh_2\, dh_3}{H_2 H_3}$. Längs der nach außen gerichteten Normalen nimmt h_1 ab (weil wir die δh_ν positiv gewählt haben), infolgedessen ist $(\mathfrak{v}\,\mathfrak{n}) = - v_1$. Unsere Begrenzungsfläche liefert also zum Integral den Beitrag

$$- \int\!\!\int \frac{v_1}{H_2 H_3}\, dh_2\, dh_3 .$$

Die Grenzen für h_2 und h_3 sind $\bar{h}_2$ und $\bar{h}_2 + \delta h_2$, bzw. $\bar{h}_3$ und $\bar{h}_3 + \delta h_3$, im Integrand ist $h_1 = \bar{h}_1$ zu setzen. Auf der gegenüberliegenden Begrenzungsfläche $\bar{h}_1 + \delta h_1$ erhält man nach dem TAYLORschen Satz als Integranden, wenn wir auch die Ableitungen zweiter Ordnung der f_ν stetig voraussetzen,

$$\left(\frac{v_1}{H_2 H_3}\right)_{h_1 = \bar{h}_1 + \delta h_1} = \left(\frac{v_1}{H_2 H_3}\right)_{h_1 = \bar{h}_1} + \frac{\partial}{\partial h_1} \left(\frac{v_1}{H_2 H_3}\right)_{h_1 = \bar{h}_1 + \vartheta_1 \delta h_1} \delta h_1 ,$$

wobei ϑ_1 zwischen 0 und 1 liegt und noch Funktion von h_2 und h_3 ist. Auf dieser Fläche nimmt h_1 längs der nach außen gerichteten Normalen zu, daher haben wir hier kein negatives Zeichen. Beide Flächen zusammen liefern also den Beitrag

$$\delta h_1 \int\!\!\int \frac{\partial}{\partial h_1} \left(\frac{v_1}{H_2 H_3}\right)_{h_1 = \bar{h}_1 + \vartheta_1 \delta h_1} dh_2\, dh_3 .$$

Wenden wir auf dieses Integral den Mittelwertsatz der Integralrechnung an, so erhalten wir $\frac{\partial}{\partial h_1} \left(\frac{v_1}{H_2 H_3}\right) \delta h_1\, \delta h_2\, \delta h_3$, wobei in der Ableitung für h_2 und h_3 passende Werte zwischen den entsprechenden Integrationsgrenzen zu setzen sind. Ähnlich liefern die vier übrigen Begrenzungsflächen $\frac{\partial}{\partial h_2} \left(\frac{v_2}{H_3 H_1}\right) \delta h_1\, \delta h_2\, \delta h_3$ und $\frac{\partial}{\partial h_3} \left(\frac{v_3}{H_1 H_2}\right) \delta h_1\, \delta h_2\, \delta h_3$.

Nun haben wir noch den Rauminhalt B des würfelartigen Bereiches zu berechnen. Führt man wieder die krummlinigen Koordinaten h_1, h_2, h_3 ein, so ergibt sich nach (2·3)

$$B = \int\int\int dx_1 dx_2 dx_3 = \int\int\int \left| \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)}{\partial(h_1, h_2, h_3)} \right| dh_1 dh_2 dh_3,$$

wobei $\bar{h}_\nu$ und $\bar{h}_\nu + \delta h_\nu$ die Grenzen für $h_\nu (\nu = 1, 2, 3)$ sind. Für das Quadrat der Funktionaldeterminante $\frac{\partial(f_1, f_2, f_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)}$ erhält man aus dem Multiplikationssatz der Determinanten gemäß den Formeln (4) und (5) der vorigen Ziffer

$$\left[\frac{\partial(f_1, f_2, f_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)}\right]^2 = H_1^2 H_2^2 H_3^2,$$

daher

$$\left| \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)}{\partial(h_1, h_2, h_3)} \right| = \frac{1}{H_1 H_2 H_3}$$

nach (2·8). Der Mittelwertsatz der Integralrechnung liefert somit

$$B = \frac{\delta h_1 \delta h_2 \delta h_3}{H_1 H_2 H_3},$$

wobei im Nenner für die h_ν geeignete Werte zwischen $\bar{h}_\nu$ und $\bar{h}_\nu + \delta h_\nu$ zu setzen sind. Damit fließt aus der Definitionsformel am Anfang dieser Ziffer

$$(1) \qquad \operatorname{div} \mathfrak{v} = H_1 H_2 H_3 \left[\frac{\partial}{\partial h_1} \left(\frac{v_1}{H_2 H_3} \right) + \frac{\partial}{\partial h_2} \left(\frac{v_2}{H_3 H_1} \right) + \frac{\partial}{\partial h_3} \left(\frac{v_3}{H_1 H_2} \right) \right],$$

wobei der Wert dieser Funktion im Punkt P zu nehmen ist.

Im folgenden wollen wir die Komponenten von $\mathfrak{v}$ in den Richtungen der positiven x, y, z-Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems mit v_x, v_y, v_z, in den Richtungen wachsender r, ϑ, φ bei Kugelkoordinaten mit $v_r, v_\vartheta, v_\varphi$ bezeichnen. Aus (1) erhält man für rechtwinklige Koordinaten wegen $H_1 = H_2 = H_3 = 1$ die bekannte Formel

$$(2) \qquad \operatorname{div} \mathfrak{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

und für Kugelkoordinaten nach (2·10)

$$(3) \qquad \operatorname{div} \mathfrak{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial (v_\vartheta \sin \vartheta)}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}.$$

4. Gradient. Die Komponenten des Vektors grad V in einer bestimmten Richtung erhält man, wenn man V nach dieser Richtung differenziert, also, falls die Richtung durch den Einheitsvektor $\mathfrak{e} = (\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, \cos\alpha_3)$ gegeben ist, durch die Formel

$$(\mathfrak{e} \operatorname{grad} V) = \sum_{\mu=1}^{3} \frac{\partial V}{\partial x_\mu} \cos \alpha_\mu.$$

Um daher die Komponente in der Richtung der Normalen der Fläche h_ν

zu berechnen, haben wir gemäß Ziffer 2 in dieser Formel $\cos\alpha_\mu = \frac{1}{H_\nu}\frac{\partial f_\nu}{\partial x_\mu}$ zu setzen. Damit folgt nach (2·7) für diese Komponente

$$\frac{1}{H_\nu}\sum_{\mu=1}^{3}\frac{\partial V}{\partial x_\mu}\frac{\partial f_\nu}{\partial x_\mu} = H_\nu \sum_{\mu=1}^{3}\frac{\partial V}{\partial x_\mu}\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial h_\nu} = H_\nu \frac{\partial V}{\partial h_\nu}.$$

In den Richtungen der positiven x, y, z-Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems ergeben sich damit die Komponenten $\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}$, in den Richtungen wachsender r, ϑ, φ bei Kugelkoordinaten gemäß (2·10) $\frac{\partial V}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \vartheta}, \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial V}{\partial \varphi}$.

Für den LAPLACEschen Operator $\Delta V = \operatorname{div} \operatorname{grad} V$ ergibt sich somit in krummlinigen Koordinaten h_1, h_2, h_3, wenn man (3·1) berücksichtigt,

$$(1)\qquad \Delta V = H_1 H_2 H_3 \left[\frac{\partial}{\partial h_1}\left(\frac{H_1}{H_2 H_3}\frac{\partial V}{\partial h_1}\right) + \frac{\partial}{\partial h_2}\left(\frac{H_2}{H_3 H_1}\frac{\partial V}{\partial h_2}\right) + \frac{\partial}{\partial h_3}\left(\frac{H_3}{H_1 H_2}\frac{\partial V}{\partial h_3}\right)\right]$$

also in Kugelkoordinaten nach (3·3)

$$(2)\qquad \Delta V = \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial V}{\partial \vartheta}\right) + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}\right].$$

5. Rotation. Die Komponente des Vektors rot $\mathfrak{v}$ im Punkte P längs der durch den Einheitsvektor $\mathfrak{n}$ gegebenen Richtung ist durch die Formel

$$(\mathfrak{n} \operatorname{rot} \mathfrak{v}) = \lim_{F\to P}\frac{1}{F}\int_C (\mathfrak{v}\mathfrak{t})\, ds$$

definiert. Dabei bedeutet F den Inhalt eines Flächenstückes, auf dem der Punkt P liegt und dessen Normale in diesem Punkt mit der Richtung $\mathfrak{n}$ zusammenfällt. C ist die Randkurve des Flächenstückes, $\mathfrak{t}$ der Einheitsvektor der Tangente von C, wobei die Kurve C so zu durchlaufen ist, daß dieser Durchlaufungssinn zusammen mit $\mathfrak{n}$ denselben Schraubungssinn haben soll wie das Koordinatensystem, d. h. also z. B. eine Rechtsschraube bilden soll, falls das Koordinatensystem ein Rechtssystem ist. Die Reihenfolge der durch h_1, h_2, h_3 gekennzeichneten Flächen wollen wir so festsetzen, daß auch das Dreibein der positiven Normalenrichtungen der Flächen h_1, h_2, h_3 in jedem Punkt denselben Schraubungssinn hat wie $\mathfrak{n}$ und C, d. h. eine Rechtsschraube bilden soll, falls das Koordinatensystem ein Rechtssystem ist. Der Grenzübergang in der obigen Formel ist so zu vollziehen, daß das Flächenstück stetig auf den Punkt P zusammengezogen wird. Der Grenzwert ist unabhängig von dem verwendeten Flächenstück, die Definition unabhängig vom Koordinatensystem.

Als Flächenstück wählen wir die durch den Punkt P gehende Fläche h_1, als Begrenzungskurve C ihre Schnittlinie mit den Flächen h_2, $h_2 + \delta h_2$,

$\bar{h}_3$, $\bar{h}_3 + \delta h_3$ (δh_2 und δh_3 positiv wie in Ziffer 3). Die Flächen $\bar{h}_2$ und $\bar{h}_3$ sollen durch P gehen. Das Flächenstück ist also ein krummliniges Viereck, eine seiner Ecken ist der Punkt P. Auf dem durch die Fläche $\bar{h}_2$ ausgeschnittenen Stück der Kurve C sind h_1 und h_2 fest, das Bogenelement ist somit $ds = \frac{dh_3}{H_3}$. Die Tangente dieses Kurvenstückes steht auf den Flächen h_3 senkrecht; für die Komponente von $\mathfrak{v}$ längs dieser Tangente ergibt sich infolgedessen $-v_3$, wenn wir den vorgeschriebenen Durchlaufungssinn beachten. Das Kurvenstück liefert also zum Randintegral den Beitrag

$$-\int_{\bar{h}_3}^{\bar{h}_3+\delta h_3} \left(\frac{v_3}{H_3}\right)_{\substack{h_1=\bar{h}_1\\ h_2=\bar{h}_2}} dh_3 .$$

Auf der gegenüberliegenden Seite des Vierecks ist der Integrand nach dem TAYLORschen Satz

$$\left(\frac{v_3}{H_3}\right)_{\substack{h_1=\bar{h}_1\\ h_2=\bar{h}_2}} + \frac{\partial}{\partial h_2}\left(\frac{v_3}{H_3}\right)_{\substack{h_1=\bar{h}_1\\ h_2=\bar{h}_2+\vartheta_2\delta h_2}} \delta h_2 ,$$

wobei ϑ_2 zwischen 0 und 1 liegt und noch Funktion von h_3 ist. Dieses Kurvenstück liefert mit Rücksicht auf den Durchlaufungssinn

$$\int_{\bar{h}_3}^{\bar{h}_3+\delta h_3} \left[\left(\frac{v_3}{H_3}\right)_{\substack{h_1=\bar{h}_1\\ h_2=\bar{h}_2}} + \frac{\partial}{\partial h_2}\left(\frac{v_3}{H_3}\right)_{\substack{h_1=\bar{h}_1\\ h_2=\bar{h}_2+\vartheta_2\delta h_2}} \delta h_2\right] dh_3 ,$$

daher zusammen mit dem früheren gemäß dem Mittelwertsatz der Integralrechnung

$$\delta h_2 \int_{\bar{h}_3}^{\bar{h}_3+\delta h_3} \frac{\partial}{\partial h_2}\left(\frac{v_3}{H_3}\right)_{\substack{h_1=\bar{h}_1\\ h_2=\bar{h}_2+\vartheta_2\delta h_2}} dh_3 = \frac{\partial}{\partial h_2}\left(\frac{v_3}{H_3}\right)\delta h_2\,\delta h_3 ,$$

wobei in der Ableitung auf der rechten Seite für h_3 ein passender, zwischen $\bar{h}_3$ und $\bar{h}_3 + \delta h_3$ gelegener Wert zu setzen ist. Beim Grenzübergang erhält man also den Wert der Ableitung im Punkte P.

Ähnlich ergeben die beiden übrigen Seiten des Vierecks mit Rücksicht auf den Durchlaufungssinn $-\frac{\partial}{\partial h_3}\left(\frac{v_2}{H_2}\right)$.

Der Inhalt F des Flächenstückes ist gemäß Ziffer 3

$$\int_{\bar{h}_2}^{\bar{h}_2+\delta h_2} dh_2 \int_{\bar{h}_3}^{\bar{h}_3+\delta h_3} \frac{dh_3}{H_2 H_3} = \frac{\delta h_2\,\delta h_3}{H_2 H_3} ,$$

wobei auf der rechten Seite im Nenner für h_2 und h_3 passende, zwischen den Integrationsgrenzen gelegene Werte zu setzen sind. Nach Ausführung des Grenzüberganges liefert daher die Definitionsformel am Anfang dieser

Ziffer für die Komponente von rot $\mathfrak{v}$ im Punkte P senkrecht zur Fläche h_1 den Wert

$$H_2 H_3 \left[\frac{\partial}{\partial h_2}\left(\frac{v_3}{H_3}\right) - \frac{\partial}{\partial h_3}\left(\frac{v_2}{H_2}\right)\right]$$

und ähnlich $H_3 H_1 \left[\frac{\partial}{\partial h_3}\left(\frac{v_1}{H_1}\right) - \frac{\partial}{\partial h_1}\left(\frac{v_3}{H_3}\right)\right]$ und $H_1 H_2 \left[\frac{\partial}{\partial h_1}\left(\frac{v_2}{H_2}\right) - \frac{\partial}{\partial h_2}\left(\frac{v_1}{H_1}\right)\right]$ für die Komponenten senkrecht zu den Flächen h_2 und h_3. In Kugelkoordinaten haben wir $h_1 = r$, $h_2 = \vartheta$, $h_3 = \varphi$. Die Richtungen wachsender r, ϑ, φ bilden in dieser Reihenfolge eine Rechtsschraube. Für die Komponenten von rot $\mathfrak{v}$ erhält man daher

$$\frac{1}{r \sin\vartheta}\left[\frac{\partial(v_\varphi \sin\vartheta)}{\partial\vartheta} - \frac{\partial v_\vartheta}{\partial\varphi}\right], \quad \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial v_r}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial(r v_\varphi)}{\partial r}, \quad \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(r v_\vartheta)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial\vartheta}\right],$$

für rechtwinklige Koordinaten die bekannten Ausdrücke

$$\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}$$

in den Richtungen der positiven x, y, z-Achse.

6. Räumliche Kugelfunktionen. Die Funktion $f(x, y, z)$ heißt homogen vom Grad ν (ν beliebige reelle, nicht notwendig ganze Zahl), wenn für alle x, y, z, t des Definitionsbereiches

$$f(tx, ty, tz) = t^\nu f(x, y, z) \tag{1}$$

ist. Differenzieren wir diese Identität partiell nach t und setzen nachher $t = 1$, so ergibt sich die auf EULER zurückgehende Beziehung

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} = \nu f.$$

Differenzieren wir dagegen (1) partiell nach irgendeiner der Veränderlichen x, y, z, so kann man durch t kürzen, d. h. die Ableitungen erster Ordnung einer homogenen Funktion ν-ten Grades sind homogene Funktionen $(\nu - 1)$-ten Grades.

Unter einer räumlichen Kugelfunktion U_ν vom Grad ν versteht man eine homogene Potentialfunktion ν-ten Grades[1]). Als solche genügt sie der EULERschen Gleichung für homogene Funktionen

$$x\frac{\partial U_\nu}{\partial x} + y\frac{\partial U_\nu}{\partial y} + z\frac{\partial U_\nu}{\partial z} = \nu U_\nu$$

[1]) Der Name Kugelfunktion geht auf C. F. GAUSS (Götting. gelehrte Anzeigen 1828, Werke Bd. 6, S. 648) zurück, die ersten Untersuchungen über Kugelfunktionen von mehreren Veränderlichen finden sich bei P. S. LAPLACE, Théorie des attractions des sphéroides et de la figure des planètes, Mém. de l'acad. 1782 (Paris 1785) oder Werke Bd. 10, S. 339—419.

und der LAPLACEschen Gleichung

$$\Delta U_\nu = 0.$$

Führt man Kugelkoordinaten ein, so erhält man

(2) $$r\frac{\partial U_\nu}{\partial r} = r\left(\frac{\partial U_\nu}{\partial x}\cos(xr) + \frac{\partial U_\nu}{\partial y}\cos(yr) + \frac{\partial U_\nu}{\partial z}\cos(zr)\right)$$
$$= x\frac{\partial U_\nu}{\partial x} + y\frac{\partial U_\nu}{\partial y} + z\frac{\partial U_\nu}{\partial z} = \nu U_\nu.$$

Die einfachste Kugelfunktion (— 1)-ter Ordnung ist

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \quad (r > 0).$$

Diese Funktion genügt tatsächlich der LAPLACEschen Differentialgleichung. Denn es ist

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{x}{r^3}, \ldots, \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{3x^2 - r^2}{r^5}, \ldots,$$

daher

$$\Delta \frac{1}{r} = 0.$$

Da mit $\frac{1}{r}$ auch sämtliche Ableitungen nach x, y, z Potentialfunktionen sind (wie durch Differenzieren der LAPLACEschen Gleichung folgt) und die Ableitungen erster Ordnung einer homogenen Funktion ν-ten Grades homogene Funktionen $(\nu - 1)$-ten Grades sind, haben wir in $\frac{1}{r}$ und seinen Ableitungen räumliche Kugelfunktionen von den Graden — 1, — 2, — 3, usw. gewonnen.

Aus

$$\frac{\partial r^\mu}{\partial x} = \mu r^{\mu-1}\frac{\partial r}{\partial x} = \mu r^{\mu-2}x, \ldots$$

(μ beliebige reelle Zahl)

ergibt sich

(3) $$\Delta(r^\mu) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu r^{\mu-2}x) + \frac{\partial}{\partial y}(\mu r^{\mu-2}y) + \frac{\partial}{\partial z}(\mu r^{\mu-2}z)$$
$$= 3\mu r^{\mu-2} + \mu(\mu-2)r^{\mu-4}(x^2+y^2+z^2)$$
$$= \mu(\mu+1)r^{\mu-2}.$$

Ferner ist

(4) $$\Delta(uv) = u\Delta v + v\Delta u + 2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right),$$

daher nach (3) und (4) für jede räumliche Kugelfunktion U_ν

$$\Delta(r^\mu U_\nu) = U_\nu \Delta(r^\mu) + 2\mu r^{\mu-2}\left(x\frac{\partial U_\nu}{\partial x} + y\frac{\partial U_\nu}{\partial y} + z\frac{\partial U_\nu}{\partial z}\right)$$
$$= \mu(\mu+1)r^{\mu-2}U_\nu + 2\mu\nu r^{\mu-2}U_\nu$$
$$= \mu(\mu+2\nu+1)r^{\mu-2}U_\nu,$$

somit, wenn wir $\mu = -2\nu - 1$ setzen,

$$\Delta(r^{-2\nu-1}U_\nu) = 0.$$

Da außerdem $r^{-2\nu-1}U_\nu$ homogen vom Grade $-\nu-1$ ist, haben wir damit eine räumliche Kugelfunktion $U_{-\nu-1}$ dieses Grades erhalten.

Wie oben erwähnt, ist jede der partiellen Ableitungen n-ter Ordnung von $\frac{1}{r}$ (n ist natürlich eine ganze positive Zahl) eine räumliche Kugelfunktion vom Grade $-n-1$. Eine solche Ableitung hat aber, wie sich durch den Schluß von n auf $n+1$ ergibt, die Gestalt

$$\frac{g_n(x, y, z)}{r^{2n+1}},$$

wobei $g_n(x, y, z)$ ein homogenes Polynom n-ten Grades ist. Da sich nun, wie eben gezeigt wurde, aus jeder räumlichen Kugelfunktion n-ten Grades wieder eine räumliche Kugelfunktion herleiten läßt, wenn man sie mit r^{-2n-1} multipliziert, so ist

$$\frac{g_n(x, y, z)}{r^{2n+1}}\, r^{-2[-(n+1)]-1} = g_n(x, y, z)$$

selbst eine räumliche Kugelfunktion n-ten Grades.

7. Ganze rationale räumliche Kugelfunktionen. Eine ganze rationale Kugelfunktion n-ten Grades hat wie jede homogene ganze rationale Funktion von x, y, z die Gestalt

$$U_n = \sum_{\alpha+\beta+\gamma=n} a_{\alpha\beta\gamma}\, x^\alpha y^\beta z^\gamma.$$

Es ist also

(1) $$a_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!}\,\frac{\partial^n U_n}{\partial x^\alpha\,\partial y^\beta\,\partial x^\gamma}.$$

Aus der Bedingung $\Delta U_n = 0$ erhält man

(2) $$\frac{\partial^{n-2}\Delta U_n}{\partial x^\lambda\,\partial y^\mu\,\partial z^\nu} = \frac{\partial^n U_n}{\partial x^{\lambda+2}\,\partial y^\mu\,\partial z^\nu} + \frac{\partial^n U_n}{\partial x^\lambda\,\partial y^{\mu+2}\,\partial z^\nu} + \frac{\partial^n U_n}{\partial x^\lambda\,\partial y^\mu\,\partial z^{\nu+2}} = 0,$$

somit wegen (1)

(3) $$(\lambda+1)(\lambda+2)\,a_{\lambda+2,\mu,\nu} + (\mu+1)(\mu+2)\,a_{\lambda,\mu+2,\nu} + (\nu+1)(\nu+2)\,a_{\lambda,\mu,\nu+2} = 0$$

für $\lambda+\mu+\nu = n-2$. Infolgedessen lassen sich alle Koeffizienten $a_{\alpha\beta\gamma}$ linear homogen durch diejenigen ausdrücken, in welchen α die Werte 0 und 1 hat. Solche gibt es $2n+1$, nämlich

$$a_{0,n,0},\quad a_{0,n-1,1},\ \ldots,\quad a_{0,0,n},$$
$$a_{1,n-1,0},\quad a_{1,n-2,1},\ \ldots,\quad a_{1,0,n-1}.$$

Diese $2n+1$ Koeffizienten bleiben willkürlich. Die so berechnete Funktion

hat demnach die Gestalt

$$U_n = \sum_{\sigma=1}^{2n+1} c_\sigma u_n^{(\sigma)}, \tag{4}$$

wobei die c_σ willkürliche Konstante und die $u_n^{(\sigma)}$ bestimmte homogene Polynome n-ten Grades in x, y, z sind.

ΔU_n ist hiermit ein homogenes Polynom $(n-2)$-ten Grades in x, y, z; seine Koeffizienten sind gemäß (1) durch $\frac{1}{\lambda!\,\mu!\,\nu!}\frac{\partial^{n-2}\Delta U_n}{\partial x^\lambda\,\partial y^\mu\,\partial z^\nu}$ gegeben, sonach Null wegen (2) und (3). Die Funktion (4) ist demgemäß die allgemeinste ganze rationale räumliche Kugelfunktion n-ten Grades. Weil die c_σ willkürlich bleiben, sind auch die $u_n^{(\sigma)}$ derartige Kugelfunktionen. Es gibt also höchstens $2n+1$ linear unabhängige ganze rationale räumliche Kugelfunktionen n-ten Grades; aus ihnen lassen sich alle übrigen linear homogen zusammensetzen.

8. Kugelflächenfunktionen. Nach (4·2) genügt eine räumliche Kugelfunktion U_ν der Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial U_\nu}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial U_\nu}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 U_\nu}{\partial\varphi^2} = 0.$$

Dabei denken wir uns U_ν gemäß (2·1) als Funktion von r, ϑ, φ. Da U_ν homogen vom ν-ten Grade ist, gilt

$$\begin{aligned} U_\nu(x, y, z) &= U_\nu(r\sin\vartheta\cos\varphi,\ r\sin\vartheta\sin\varphi,\ r\cos\vartheta) \\ &= r^\nu U_\nu(\sin\vartheta\cos\varphi,\ \sin\vartheta\sin\varphi,\ \cos\vartheta) \\ &= r^\nu S_\nu(\vartheta, \varphi). \end{aligned}$$

Die nur von ϑ und φ abhängige Funktion $S_\nu(\vartheta, \varphi)$ nennt man die zu U_ν gehörige Kugelflächenfunktion. Nach (6·2) ist

$$r^2\frac{\partial U_\nu}{\partial r} = \nu r U_\nu$$

und

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial U_\nu}{\partial r}\right) = \nu\frac{\partial}{\partial r}(r U_\nu) = \nu(U_\nu + \nu U_\nu) = \nu(\nu+1)U_\nu;$$

S_ν genügt daher der Differentialgleichung

$$\nu(\nu+1)S_\nu + \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial S_\nu}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 S_\nu}{\partial\varphi^2} = 0. \tag{1}$$

Nach Ziffer 6 ist neben U_ν auch $U_{-\nu-1} = U_\nu r^{-2\nu-1}$ räumliche Kugelfunktion. Die zugehörige Kugelflächenfunktion ist

$$S_{-\nu-1} = U_{-\nu-1}r^{\nu+1} = U_\nu r^{-\nu} = S_\nu,$$

also wieder S_ν in Übereinstimmung mit der Tatsache, daß ν in der Differentialgleichung für S_ν nur in der Verbindung $\nu(\nu+1)$ auftritt, somit die Differentialgleichung ungeändert bleibt, wenn man ν durch $-\nu-1$ ersetzt. Zu jeder Kugelflächenfunktion S_ν gehören also die beiden räumlichen Kugelfunktionen U_ν und $U_{-\nu-1} = U_\nu r^{-2\nu-1}$.

§ 2. Zonale Kugelfunktionen.

9. Zonale Kugelfunktionen. Wenn die Kugelflächenfunktion $S_\nu(\vartheta, \varphi)$ nur von ϑ abhängt, wollen wir sie mit P_ν bezeichnen und zonale Kugelfunktion nennen. Sie genügt, da $\frac{\partial P_\nu}{\partial \varphi} = 0$ ist, nach (8·1) der Differentialgleichung

$$\nu(\nu+1)P_\nu + \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{d}{d\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{dP_\nu}{d\vartheta}\right) = 0.$$

Führen wir statt der Veränderlichen ϑ die Veränderliche $\xi = \cos\vartheta$ ein, so ergibt sich, weil $\frac{d\xi}{d\vartheta} = -\sin\vartheta$ ist,

$$\nu(\nu+1)P_\nu + \frac{d}{d\xi}\left(\sin^2\vartheta\frac{dP_\nu}{d\xi}\right) = 0$$

oder wegen $\sin^2\vartheta = 1-\xi^2$

$$\nu(\nu+1)P_\nu - 2\xi\frac{dP_\nu}{d\xi} + (1-\xi^2)\frac{d^2P_\nu}{d\xi^2} = 0. \tag{1}$$

Aus den Formeln

$$\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}, \quad \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z} = -\frac{z}{r^3}, \quad \frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial z^2} = \frac{3z^2-r^2}{r^5}, \ldots$$

folgern wir, daß

$$\frac{\partial^n\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z^n} = \frac{F(z,r)}{r^{2n+1}}$$

ist, wobei $F(z,r)$ ein homogenes Polynom n-ten Grades in x, y, z bedeutet, das jedoch außer z diese Veränderlichen nur in der Verbindung $r^2 = x^2+y^2+z^2$ enthält. Es ist somit

$$F(z,r) = r^n F\left(\frac{z}{r}, 1\right) = r^n F(\cos\vartheta, 1),$$

also

$$\frac{\partial^n\frac{1}{r}}{\partial z^n} = \frac{F(\cos\vartheta, 1)}{r^{n+1}}.$$

Die linke Seite ist nach Ziffer 6 eine räumliche Kugelfunktion des Grades $-(n+1)$, also $F(\cos\vartheta, 1)$ nach Ziffer 8 eine Kugelflächenfunktion S_{-n-1}, die offensichtlich von ϑ allein abhängt. Wir benützen diese Formel,

um P_n eindeutig festzulegen, und setzen

(2) $$P_n(\cos\vartheta) = \frac{(-1)^n}{n!}\, r^{n+1} \frac{\partial^n \frac{1}{r}}{\partial z},$$

insbesondere $P_0 = 1$.

10. Legendresche Polynome. Entwicklung der reziproken Entfernung zweier Punkte. Die Funktionen $P_n(\cos\vartheta) = P_n(\xi)$ sind nach der vorigen Ziffer Polynome n-ten Grades in ξ und damit nicht nur für $-1 \leqq \xi \leqq +1$, sondern für beliebige Werte von ξ definiert. Sie heißen die LEGENDREschen Polynome. Der Name stammt davon, daß sie zum ersten Male von LEGENDRE[1]) bei der Reihenentwicklung der reziproken Entfernung zweier Punkte verwendet wurden. Es handelt sich um folgende Aufgabe: R sei die Entfernung der beiden Punkte $P(x, y, z)$ und $P'(0, 0, r')$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ und $r' \geqq 0$. Es ist $R = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - r')^2}$. Nun ist $\frac{1}{r}$ eine analytische Funktion von z, sobald P vom Nullpunkt verschieden ist. Für hinreichend kleine r' folgt daher nach dem TAYLORschen Satz gemäß (9·2)

$$\begin{aligned}\frac{1}{R} &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - r')^2}}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{r'^n}{n!} \frac{\partial^n \frac{1}{r}}{\partial z^n}\\ &= \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n(\cos\vartheta)\\ &= \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n P_n(\cos\vartheta),\end{aligned}$$

wenn noch $\frac{r'}{r} = \alpha$ gesetzt wird, d. h. die LEGENDREschen Polynome sind die Koeffizienten der Potenzen von α, wenn man die reziproke Entfernung von P und P' als erzeugende Funktion benützt und sie nach Potenzen von α entwickelt. Es ergibt sich also wegen $\xi = \frac{z}{r}$ und

$$\frac{1}{R} = (r^2 - 2rr'\xi + r'^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{r}(1 - 2\alpha\xi + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$$

die Entwicklung

(1) $$(1 - 2\alpha\xi + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\xi)\,\alpha^n.$$

Fassen wir α als komplexe Veränderliche auf, so ist die linke Seite

---

[1]) A. M. LEGENDRE, Sur l'attraction des sphéroides, Mém. prés. à l'acad. par divers savants, Bd. 10, Paris 1785.

eine analytische Funktion von α, deren singuläre Stellen, da $\xi = \cos\vartheta = \frac{e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta}}{2}$ ist, die Lösungen $e^{\pm i\vartheta}$ der Gleichung $1 - 2\alpha\xi + \alpha^2 = 0$ sind. Die Entwicklung gilt also im Kreis $|\alpha| < 1$. Man erhält somit für $r' < r$

(2) $$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n(\cos\vartheta),$$

für $r' > r$ dagegen durch Vertauschung von r' und r

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r'} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{r'}\right)^n P_n(\cos\vartheta).$$

Da

$$(1-\alpha)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n, \quad (1+\alpha)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \alpha^n$$

ist, folgt aus (1) für $\xi = 1$ bzw. $\xi = -1$:

(3) $$P_n(1) = 1,$$

(4) $$P_n(-1) = (-1)^n.$$

Da ferner

$$(1+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2n} (-1)^n \alpha^{2n}$$

ist, ergibt sich $P_n(0) = 0$ für ungerades n und

$$P_n(0) = (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{1 \cdot 3 \cdots (n-1)}{2 \cdot 4 \cdots n}$$

für gerades n.

11. Entwicklung in eine Fouriersche Reihe. Es ist

$$1 - 2\alpha\cos\vartheta + \alpha^2 = (1 - \alpha e^{i\vartheta})(1 - \alpha e^{-i\vartheta}),$$

daher

$$(1 - 2\alpha\cos\vartheta + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}} = (1 - \alpha e^{i\vartheta})^{-\frac{1}{2}} (1 - \alpha e^{-i\vartheta})^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2n} \alpha^n e^{in\vartheta}\right] \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2n} \alpha^n e^{-in\vartheta}\right].$$

Da die beiden Reihen für $|\alpha| < 1$ absolut konvergieren, erhält man für den Koeffizienten von α^n im Produkt nach (10·1)

(1) $$P_n(\cos\vartheta) = 2\,\frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2n} \Big[\cos n\vartheta + \frac{1 \cdot n}{1 \cdot (2n-1)} \cos(n-2)\vartheta$$
$$+ \frac{1 \cdot 3 \cdot n(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot (2n-1)(2n-3)} \cos(n-4)\vartheta + \cdots$$
$$+ \frac{1 \cdot 3 \cdots (2k-1) n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!\,(2n-1)(2n-3) \cdots (2n-2k+1)} \cos(n-2k)\vartheta + \cdots\Big].$$

Die Reihe bricht mit einem konstanten Glied oder einem solchen, das $\cos\vartheta$ enthält, ab, je nachdem n gerade oder ungerade ist. Im konstanten Glied

ist der Faktor $\frac{1}{2}$ hinzuzufügen, weil es nicht durch Zusammenfassen zweier Glieder $e^{in\vartheta}$ und $e^{-in\vartheta}$ entsteht. Man erhält es, wenn man in den beiden binomischen Entwicklungen die Koeffizienten von $\alpha^{\frac{n}{2}}$ miteinander multipliziert, und es lautet

$$\left[\frac{1\cdot 3\cdots(n-1)}{2\cdot 4\cdots n}\right]^2.$$

Wenn $\vartheta = 0$, also $\xi = 1$ ist, haben sämtliche Glieder der Reihe in (1) ihren größten Wert, es ist also $P_n(\xi) \leqq 1$ nach (10·3). Eine untere Schranke für die rechte Seite von (1) erhält man, wenn man alle Kosinus durch -1 ersetzt. Die rechte Seite hat dann den Wert -1, weil sich für $\vartheta = 0$ (alle Kosinus $= +1$) der entgegengesetzt gleiche Wert $+1$ ergibt. Daraus folgt nach (10·4)

(2) $$-1 \leqq P_n(\xi) \leqq +1 \quad \text{für} \quad -1 \leqq \xi \leqq +1.$$

Damit erhält man für $|\alpha| \leqq q < 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |P_n(\xi)|\,|\alpha|^n \leqq \sum_{n=0}^{\infty} q^n,$$

d. h. die Reihe (10·1) konvergiert bei festem $0 < q < 1$ absolut und gleichmäßig bezüglich α und $\xi = \cos\vartheta$ für alle Werte von ϑ und alle $|\alpha| \leqq q < 1$, wobei ϑ reell ist, während α auch imaginär sein kann.

12. Rekursionsformeln. Aus der Entwicklung (10·1) erhalten wir leicht eine Rekursionsformel der LEGENDREschen Polynome für drei unmittelbar aufeinanderfolgende Werte des Zeigers n. Es ist nämlich:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}(1-2\alpha\xi+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}} = (\xi-\alpha)(1-2\alpha\xi+\alpha^2)^{-\frac{3}{2}},$$

somit

$$(1-2\alpha\xi+\alpha^2)\sum_{n=1}^{\infty} n\,\alpha^{n-1}P_n(\xi) + (\alpha-\xi)\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n P_n(\xi) = 0,$$

daher, wenn man die Koeffizienten von α^n vergleicht ($n > 0$),

(1) $$(n+1)P_{n+1}(\xi) - (2n+1)\,\xi P_n(\xi) + n P_{n-1}(\xi) = 0.$$

Diese Formel geht auf O. BONNET[1]) zurück.

Eine weitere Rekursionsformel gewinnen wir in folgender Weise: $(1-2\alpha\xi+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$ ist eine analytische Funktion der beiden komplexen Veränderlichen α und ξ in hinreichend kleinen Kreisen mit den Mittelpunkten $\alpha = 0$ und $\xi = 0$. Sie läßt sich daher eindeutig in eine Potenzreihe nach α und ξ entwickeln, die in diesen Kreisen absolut und gleichmäßig konvergiert. Ordnet man diese Reihe nach Potenzen von α, so erhält

---

[1]) O. BONNET, J. math. pur. appl. 17 (1852) 267.

man die Entwicklung (10·1). Da man Potenzreihen gliedweise differenzieren kann, ergibt sich, wenn man partiell nach ξ differenziert,

$$\alpha(1 - 2\alpha\xi + \alpha^2)^{-\frac{3}{2}} = \sum_{n=1}^{\infty} P'_n(\xi)\alpha^n$$

oder wegen $P_0 = 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\xi)\,\alpha^n = (1 - 2\alpha\xi + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=1}^{\infty} P'_n(\xi)\,\alpha^{n-1}(1 - 2\alpha\xi + \alpha^2),$$

daher, wenn man die Koeffizienten von α^n vergleicht ($n > 0$),

(2) $$P'_{n+1}(\xi) - 2\xi P'_n(\xi) + P'_{n-1}(\xi) = P_n(\xi).$$

Differenzieren wir (1) nach ξ, so entsteht

(3) $$(n+1)\,P'_{n+1}(\xi) - (2n+1)\xi P'_n(\xi) + n\,P'_{n-1}(\xi) = (2n+1)\,P_n(\xi).$$

Eliminiert man aus (2) und (3) der Reihe nach $P'_{n+1}(\xi)$, $P'_n(\xi)$, $P'_{n-1}(\xi)$, so ergeben sich die Formeln

(4) $$\xi P'_n(\xi) - P'_{n-1}(\xi) = n\,P_n(\xi),$$

(5) $$P'_{n+1}(\xi) - P'_{n-1}(\xi) = (2n+1)\,P_n(\xi),$$

(6) $$P'_{n+1}(\xi) - \xi P'_n(\xi) = (n+1)\,P_n(\xi).$$

Schreibt man $n - 1$ statt n in (6) und setzt $P'_{n-1}(\xi)$ aus (4) ein, so erhält man

(7) $$(\xi^2 - 1)\,P'_n(\xi) = n\,[\xi P_n(\xi) - P_{n-1}(\xi)].$$

Formel (5) geht auf CHRISTOFFEL[1]) zurück. Alle Rekursionsformeln sind auch für $n = 0$ richtig, wenn man $P_{-1}(\xi)$ durch Null ersetzt. Sie gelten als Identitäten zwischen Polynomen für beliebige Werte von ξ.

13. Berechnung der Koeffizienten. Aus der Rekursionsformel (12·1) lassen sich die Koeffizienten der Potenzen von ξ in den LEGENDREschen Polynomen berechnen. Man erhält

(1)
$$\begin{aligned} P_0(\xi) &= 1, \\ P_1(\xi) &= \xi, \\ P_2(\xi) &= \frac{1\cdot 3}{2!}\left(\xi^2 - \frac{1}{3}\right), \\ P_3(\xi) &= \frac{1\cdot 3\cdot 5}{3!}\left(\xi^3 - \frac{3}{5}\xi\right), \\ P_4(\xi) &= \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{4!}\left(\xi^4 - \frac{6}{7}\xi^2 + \frac{3}{35}\right), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

---

[1]) E. B. CHRISTOFFEL, Diss. Berlin 1856.

Den Verlauf dieser Funktionen zeigt Abb. 2. Man ersieht aus den Formeln (1), daß allgemein

$$P_n(\xi) = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{n!}(\xi^n - c_2\,\xi^{n-2} + c_4\,\xi^{n-4} - \cdots)$$

ist. Die Koeffizienten c_{2m} bestimmt man am einfachsten, indem man das

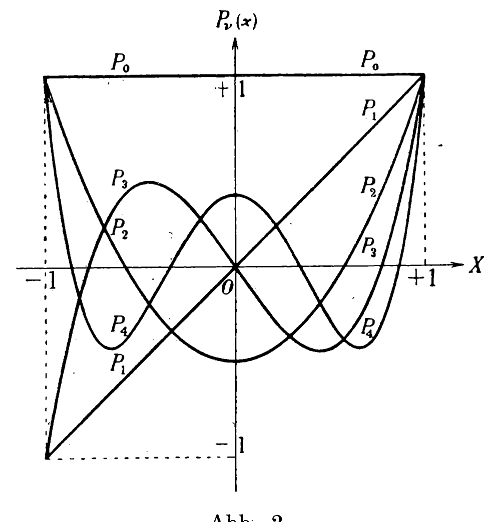


Abb. 2.

Polynom $\sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^m c_{2m}\xi^{n-2m}$ in die Differentialgleichung (9·1) mit $\nu = n$ einsetzt und die Koeffizienten von ξ^{n-2m} miteinander vergleicht. $\left[\frac{n}{2}\right]$ bedeutet die größte ganze Zahl $\leqq \frac{n}{2}$. Man erhält

$$n(n+1)\sum(-1)^m c_{2m}\xi^{n-2m} - 2\xi\sum(-1)^m(n-2m)\,c_{2m}\xi^{n-2m-1}$$
$$+(1-\xi^2)\sum(-1)^m(n-2m)(n-2m-1)\,c_{2m}\xi^{n-2m-2} = 0$$

oder

$$(-1)^m n(n+1)\,c_{2m} - (-1)^m 2(n-2m)\,c_{2m}$$
$$+(-1)^{m-1}(n-2m+2)(n-2m+1)\,c_{2m-2}$$
$$-(-1)^m(n-2m)(n-2m-1)\,c_{2m} = 0,$$

daher

(2) $$c_{2m} = \frac{(n-2m+2)(n-2m+1)}{2m(2n-2m+1)}c_{2m-2}$$

$$\left(m = 1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]\right), \quad c_0 = 1.$$

Es ist somit allgemein

$$(3)\quad P_n(\xi) = \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{n!}\Big[\xi^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}\xi^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 4\cdot(2n-1)(2n-3)}\xi^{n-4} - \cdots + (-1)^m \frac{n(n-1)\cdots(n-2m+1)}{2\cdot 4\cdots 2m(2n-1)(2n-3)\cdots(2n-2m+1)}\xi^{n-2m} + \cdots\Big].$$

Die Reihe bricht, wie sich aus (2) ergibt, mit der nullten oder ersten Potenz von ξ ab, je nachdem n gerade oder ungerade ist. Es ist ferner

$$(4)\qquad P_n(-\xi) = (-1)^n P_n(\xi).$$

Der Koeffizient von ξ^{n-2m} in der Formel (3) lautet

$$(-1)^m \frac{1\cdot 3\cdots(2n-2m-1)}{2^m m!\,(n-2m)!} = \frac{(-1)^m(2n-2m)!}{2^n m!\,(n-m)!\,(n-2m)!},$$

daher ist

$$(5)\qquad P_n(\xi) = \sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^m \frac{(2n-2m)!}{2^n m!\,(n-m)!\,(n-2m)!}\xi^{n-2m}.$$

14. Integraldarstellung von Laurent. Formel von Rodrigues. Aus der Potenzreihenentwicklung

$$(1-2\xi\alpha+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\xi)\,\alpha^n$$

erhält man nach einer bekannten Formel der Funktionentheorie

$$P_n(\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{d\zeta}{\zeta^{n+1}\sqrt{1-2\xi\zeta+\zeta^2}},$$

wobei das Integral über eine Kurve C zu erstrecken ist, die den Nullpunkt der ζ-Ebene im positiven Sinn einmal umkreist und keine singulären Punkte von $(1-2\xi\zeta+\zeta^2)^{-\frac{1}{2}}$ einschließt. Man kann den Integranden dadurch rational machen, daß man durch die Gleichung $\sqrt{1-2\xi\zeta+\zeta^2} = \zeta z - 1$ die neue Veränderliche z einführt. Es ist nämlich

$$\zeta = \frac{2(z-\xi)}{z^2-1},\quad \sqrt{1-2\xi\zeta+\zeta^2} = \frac{1-2\xi z+z^2}{z^2-1},$$

$$\frac{d\zeta}{dz} = -\frac{2(1-2\xi z+z^2)}{(z^2-1)^2}.$$

Eine genügend kleine Umgebung U des Nullpunktes der ζ-Ebene ist dabei konform auf eine Umgebung U' des Punktes ∞ der z-Ebene abgebildet, da die Quadratwurzel für $\zeta = 0$ den Wert $+1$ hat. U' liegt außerhalb eines Kreises, dessen Mittelpunkt mit dem Nullpunkt der z-Ebene zusammenfällt und dessen Halbmesser ϱ beliebig groß ist, falls nur U entsprechend klein gewählt wird. Liegt die Kurve C innerhalb U, so wird

sie auf eine Kurve C' innerhalb U' umkehrbar eindeutig abgebildet. C' umschließt also den Punkt ξ der z-Ebene, falls ϱ genügend groß ist. Dem positiven Umlauf auf C um $\zeta = 0$ entspricht der positive Umlauf auf C' um $z = \infty$, d. h. der negative Umlauf um $z = \xi$. Damit ergibt sich

$$(1) \qquad P_n(\xi) = \frac{1}{2^n \cdot 2\pi i} \int\limits_{C'} \frac{(z^2-1)^n}{(z-\xi)^{n+1}}\, dz,$$

wobei nach dem Cauchyschen Integralsatz für C' irgendeine Kurve gewählt werden kann, die den Punkt ξ im positiven Sinn umkreist. Aus (1) folgt nach der CAUCHYschen Integralformel

$$(2) \qquad P_n(\xi) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n(\xi^2-1)^n}{d\xi^n}.$$

Die erste dieser beiden Formeln stammt von LAURENT[1]), die zweite von RODRIGUES[2]). Formel (2) läßt sich mit Hilfe von (13·5) leicht durch direkte Rechnung bestätigen.

15. Integraldarstellungen von Laplace und Jacobi. Wir denken uns nun $\xi > 1$ im Integral der Formel (14·1) und führen die neue Veränderliche φ durch $z = \xi + \sqrt{\xi^2-1}\, e^{i\varphi}$ ein. Die Kurve C' möge ein Kreis K sein. Wenn z diesen Kreis im positiven Sinn durchläuft, bewegt sich φ reell von $-\pi$ bis $+\pi$. Wir erhalten demnach

$$P_n(\xi) = \frac{1}{2^{n+1}\pi i} \int\limits_K \frac{(z^2-1)^n}{(z-\xi)^{n+1}}\, dz$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}\pi} \int\limits_{-\pi}^{+\pi} \frac{\left[\xi^2 - 1 + 2\xi\sqrt{\xi^2-1}\, e^{i\varphi} + (\xi^2-1)\, e^{2i\varphi}\right]^n}{\sqrt{\xi^2-1}^{\,n}\, e^{ni\varphi}}\, d\varphi$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{+\pi} \left(\xi + \sqrt{\xi^2-1}\cos\varphi\right)^n d\varphi,$$

also schließlich

$$(1) \qquad P_n(\xi) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\pi} \left(\xi + \sqrt{\xi^2-1}\cos\varphi\right)^n d\varphi.$$

Die Quadratwurzel tritt in diesem Integral nur scheinbar auf. Entwickelt man nämlich die n-te Potenz nach dem binomischen Satz, so fallen alle Glieder weg, welche die Quadratwurzel in ungerader Potenz enthalten, denn $\int\limits_0^{\pi} \cos^k\varphi\, d\varphi = 0$ für ungerades positives k. Es ist infolgedessen gleich-

---

[1]) P. A. LAURENT, J. math. pur. appl., Serie 3, 1 (1875) 373.

[2]) O. RODRIGUES, Corresp. de l'école pol. 3 (1816) 361—385.

gültig, welches Zeichen wir der Quadratwurzel beilegen. Da es sich somit bei den Funktionen von ξ auf beiden Seiten der Gleichung (1) um Polynome handelt, gilt sie allgemein für jeden Wert von ξ, also auch für die bei $P_n(\xi)$ wegen $\xi = \cos\vartheta$ am meisten in Betracht kommenden Werte $-1 \leqq \xi \leqq +1$, d. h. wir erhalten in diesem Fall

(2) $$P_n(\xi) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \left(\xi \pm i\sqrt{1-\xi^2}\cos\varphi\right)^n d\varphi$$

oder

(3) $$P_n(\cos\vartheta) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi (\cos\vartheta \pm i\sin\vartheta\cos\varphi)^n\, d\varphi.$$

Diese Integraldarstellung stammt von LAPLACE[1]).

Wir führen jetzt im Integral der Formel (1) an Stelle von φ die neue Veränderliche ψ durch die Gleichung

(4) $$\xi + \sqrt{\xi^2-1}\cos\varphi = \frac{1}{\xi - \sqrt{\xi^2-1}\cos\psi}$$

ein und setzen dabei wieder $\xi > 1$ sowie $0 \leqq \psi \leqq \pi$ voraus. Dann folgt aus (4), daß jedem Punkt des Intervalls $0 \leqq \varphi \leqq \pi$ genau ein Punkt des Intervalls $0 \leqq \psi \leqq \pi$ entspricht.

Aus (4) fließt

$$\cos\varphi = \frac{\xi\cos\psi - \sqrt{\xi^2-1}}{\xi - \sqrt{\xi^2-1}\cos\psi}$$

und mit Rücksicht darauf, daß $\xi > \sqrt{\xi^2-1}\cos\psi$ ist,

$$\sin\varphi = \frac{\sin\psi}{\xi - \sqrt{\xi^2-1}\cos\psi},$$

ferner

$$\frac{d\varphi}{d\psi} = \frac{1}{\xi - \sqrt{\xi^2-1}\cos\psi}$$

und somit

(5) $$\int\limits_0^\pi \left(\xi + \sqrt{\xi^2-1}\cos\varphi\right)^n d\varphi = \int\limits_0^\pi \frac{d\psi}{(\xi - \sqrt{\xi^2-1}\cos\psi)^{n+1}}.$$

Zufolge der analytischen Fortsetzung ist diese Gleichung für alle ξ richtig, solange beide Seiten analytische Funktionen von ξ sind und auf demselben

[1]) P. S. LAPLACE, Mécanique céleste, Bd. 5, Buch 11, Kap. 2, Paris 1825, oder Werke Bd. 5, S. 27—69.

Weg fortgesetzt werden. Daraus ergibt sich gemäß (2) für $0 < \xi \leqq 1$ und $-1 \leqq \xi < 0$ die von JACOBI[1]) herrührende Formel

$$(6) \qquad P_n(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\psi}{(\xi \pm i\sqrt{1-\xi^2}\cos\psi)^{n+1}}.$$

16. Integraldarstellungen von Mehler und Dirichlet. Wir wählen nun in (15·3) das positive Zeichen, führen die neue Veränderliche $z = \cos\vartheta + i\sin\vartheta\cos\varphi$ ein und setzen dabei $0 < \vartheta < \pi$ voraus. Dann ist

$$\sin\vartheta\sin\varphi = \sqrt{1 - 2z\cos\vartheta + z^2},$$

wobei derjenige Zweig der Quadratwurzel zu wählen ist, der für $z = \cos\vartheta$ positiv ist; somit wird

$$(1) \qquad P_n(\cos\vartheta) = \frac{i}{\pi} \int_A^B \frac{z^n\,dz}{\sqrt{1 - 2z\cos\vartheta + z^2}},$$

wobei vom Punkt $A(z = e^{i\vartheta})$ zum Punkt $B(z = e^{-i\vartheta})$ geradlinig zu integrieren ist. Statt der Strecke AB kann man nach dem CAUCHYschen Integralsatz auch den von A nach B führenden Bogen des Einheitskreises als Integrationsweg wählen. Schließt man nämlich zuerst die Punkte A und B durch die in Abb. 3 gezeichneten kleinen Kreisbogen aus, so ist das über den stark ausgezogenen Weg erstreckte Integral $= 0$, weil der Integrand auf diesem Wege und in dem von ihm begrenzten Gebiet überall analytisch ist. Läßt man dann die Halbmesser der kleinen Kreisbogen gegen Null konvergieren, so streben auch die betreffenden Teile des Integrals gegen Null, und die Behauptung ist bewiesen.

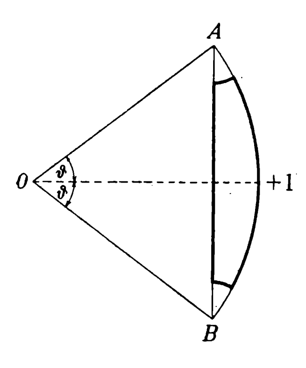


Abb. 3.

Daß die Integrale über die kleinen Kreisbogen mit dem Halbmesser ϱ dieser Bogen gegen Null streben, möge beim Punkt A gezeigt werden. Es ist auf dem Kreisbogen

$$|z - e^{i\vartheta}| = \varrho, \quad |z - e^{-i\vartheta}| > \sin\vartheta, \quad |z| < 1 + \varrho,$$

somit der Betrag des Integrals, weil

$$1 - 2z\cos\vartheta + z^2 = (z - e^{i\vartheta})(z - e^{-i\vartheta})$$

ist, kleiner als $\dfrac{(1+\varrho)^n}{\sqrt{\varrho\sin\vartheta}}\,\varrho\vartheta$. Er strebt also mit ϱ gegen Null.

[1]) C. G. J. JACOBI, J. reine angew. Math. 26 (1843) 81 oder Werke Bd. 6, S. 148.

Der Integration über den Kreisbogen $\widehat{AB}$ entsprechend, werden wir jetzt $z = e^{i\varphi}$ in (1) setzen. Damit erhalten wir

$$P_n(\cos\vartheta) = -\frac{1}{\pi}\int_{+\vartheta}^{-\vartheta} \frac{e^{i(n+1)\varphi}}{\sqrt{1-2e^{i\varphi}\cos\vartheta + e^{2i\varphi}}}\,d\varphi$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\vartheta}^{+\vartheta} \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})\varphi}}{\sqrt{2(\cos\varphi-\cos\vartheta)}}\,d\varphi$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\vartheta}^{+\vartheta} \frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi}{\sqrt{2(\cos\varphi-\cos\vartheta)}}\,d\varphi + \frac{i}{\pi}\int_{-\vartheta}^{+\vartheta} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi}{\sqrt{2(\cos\varphi-\cos\vartheta)}}\,d\varphi.$$

Im ersten der beiden letzten Integrale ändert sich der Integrand nicht, wenn man φ durch $-\varphi$ ersetzt, im zweiten ändert er dabei sein Zeichen. Das zweite Integral verschwindet daher, und man erhält für $0 < \vartheta < \pi$

(2) $$P_n(\cos\vartheta) = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{\vartheta} \frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi}{\sqrt{\cos\varphi-\cos\vartheta}}\,d\varphi.$$

Ersetzen wir in (2) ϑ durch $\pi-\vartheta$ und führen die neue Veränderliche $\psi = \pi - \varphi$ ein, so folgt mit Rücksicht auf (13·4)

$$(-1)^n P_n(\cos\vartheta) = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{\pi-\vartheta} \frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi}{\sqrt{\cos\varphi+\cos\vartheta}}\,d\varphi$$

$$= (-1)^{n+1}\frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_{\pi}^{\vartheta} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\psi}{\sqrt{\cos\vartheta-\cos\psi}}\,d\psi,$$

somit

(3) $$P_n(\cos\vartheta) = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_{\vartheta}^{\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi}{\sqrt{\cos\vartheta-\cos\varphi}}\,d\varphi.$$

Die Formeln (2) und (3) gehen auf G. MEHLER[1]) zurück.

Wenn wir aus ihnen das arithmetische Mittel bilden, erhalten wir

$$P_n(\cos\vartheta) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}}\left[\int_0^{\vartheta} \frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi}{\sqrt{\cos\varphi-\cos\vartheta}}\,d\varphi + \int_{\vartheta}^{\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi}{\sqrt{\cos\vartheta-\cos\varphi}}\,d\varphi\right],$$

---

[1]) G. MEHLER, Math. Ann. 5 (1872) 141.

wenn wir sie dagegen voneinander abziehen und n durch $n-1$ ersetzen, für $n > 0$

$$0 = \frac{1}{\pi\sqrt{2}}\left[\int_0^\vartheta \frac{\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\vartheta}}\,d\varphi - \int_\vartheta^\pi \frac{\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\varphi}{\sqrt{\cos\vartheta - \cos\varphi}}\,d\varphi\right].$$

Aus den beiden letzten Gleichungen folgen durch Addition und Subtraktion die Formeln von DIRICHLET[1]) für $n > 0$ und $0 < \vartheta < \pi$:

$$(4)\quad \begin{cases} P_n(\cos\vartheta) = \dfrac{\sqrt{2}}{\pi}\left[\displaystyle\int_0^\vartheta \frac{\cos n\varphi\cos\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{\cos\varphi-\cos\vartheta}}\,d\varphi + \int_\vartheta^\pi \frac{\cos n\varphi\sin\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{\cos\vartheta-\cos\varphi}}\,d\varphi\right], \\[2ex] P_n(\cos\vartheta) = \dfrac{\sqrt{2}}{\pi}\left[-\displaystyle\int_0^\vartheta \frac{\sin n\varphi\sin\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{\cos\varphi-\cos\vartheta}}\,d\varphi + \int_\vartheta^\pi \frac{\sin n\varphi\cos\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{\cos\vartheta-\cos\varphi}}\,d\varphi\right]. \end{cases}$$

17. Nullstellen. Mit Hilfe der Formel (14·2) können wir die Anzahl der Nullstellen von $P_n(\xi)$ bestimmen. $(\xi^2-1)^n$ hat nämlich je eine n-fache Nullstelle in $+1$ und -1. Die erste Ableitung dieses Polynoms hat daher je eine $(n-1)$-fache Nullstelle in $+1$ und -1 und eine einfache dazwischen nach dem ROLLEschen Satz der Differentialrechnung; die zweite Ableitung hat aus demselben Grund je eine $(n-2)$-fache Nullstelle in $+1$ und -1 und zwei einfache dazwischen usw.; die $(n-1)$-te Ableitung hat je eine einfache Nullstelle in $+1$ und -1 und $n-1$ einfache dazwischen, daher hat die n-te Ableitung oder $P_n(\xi)$ genau n einfache zwischen -1 und $+1$ gelegene Nullstellen.

α sei Nullstelle von $P_n(\xi)$. Dann ist $P_{n-1}(\alpha) \neq 0$ nach (12·7), weil sonst auch $P_n'(\alpha) = 0$ und daher α eine mehrfache Nullstelle von $P_n(\xi)$ wäre. Ferner haben $P_{n-1}(\alpha)$ und $P_n'(\alpha)$ nach derselben Formel gleiches Vorzeichen, da $|\alpha| < 1$ ist. β sei eine unmittelbar auf α folgende Nullstelle. Dann haben mit Rücksicht auf die Einfachheit der Nullstellen $P_n'(\alpha)$ und $P_n'(\beta)$ entgegengesetztes Vorzeichen, daher auch $P_{n-1}(\alpha)$ und $P_{n-1}(\beta)$; zwischen α und β liegt somit mindestens eine Nullstelle von $P_{n-1}(\xi)$. Weil aber $P_{n-1}(\xi)$ gerade $n-1$ einfache Nullstellen hat, trennen einander die Nullstellen von $P_{n-1}(\xi)$ und $P_n(\xi)$.

Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = [P_n(x)]^2 + \frac{1-x^2}{n(n+1)}[P_n'(x)]^2.$$

[1]) P. L. DIRICHLET, J. reine angew. Math. 17 (1837) 41.

Zufolge der Differentialgleichung (9·1) ist

$$f'(x) = \frac{2x[P'_n(x)]^2}{n(n+1)},$$

also $f'(x) > 0$ für $x > 0$, d. h. $f(x)$ wächst fortwährend für $x > 0$. $P'_n(x)$ hat aber $n - 1$ einfache Nullstellen, von denen jede zwischen zwei unmittelbar aufeinanderfolgenden Nullstellen von $P_n(x)$ liegt. Weil die Nullstellen von $P'_n(x)$ einfach sind, hat $P_n(x)$ an ihnen Maxima oder Minima. Da $f(\alpha) = [P_n(\alpha)]^2$ für eine Nullstelle α von $P'_n(x)$ ist, wachsen somit die absoluten Beträge der Extremwerte von $P_n(x)$ mit $|x|$, wenn wir noch (13·4) berücksichtigen.

§ 3. Zugeordnete Kugelfunktionen.

18. Zugeordnete Legendresche Funktionen. $P_n(\xi)$ genügt, wie wir gesehen haben, der Differentialgleichung (9·1)

$$(1-\xi^2)\frac{d^2P_n}{d\xi^2} - 2\xi\frac{dP_n}{d\xi} + n(n+1)P_n = 0.$$

Für die erste Ableitung $P'_n(\xi)$ erhalten wir daher, wenn wir diese Gleichung nach ξ differenzieren,

$$(1-\xi^2)\frac{d^2P'_n}{d\xi^2} - 4\xi\frac{dP'_n}{d\xi} + [n(n+1)-2]P'_n = 0,$$

ähnlich für die zweite Ableitung $P''_n(\xi)$, wenn wir nochmals differenzieren,

$$(1-\xi^2)\frac{d^2P''_n}{d\xi^2} - 6\xi\frac{dP''_n}{d\xi} + [n(n+1)-2-4]P''_n = 0.$$

Differenzieren wir im ganzen m-mal, so ergibt sich für die m-te Ableitung $P_n^{(m)}(\xi)$

$$(1-\xi^2)\frac{d^2P_n^{(m)}}{d\xi^2} - 2(m+1)\xi\frac{dP_n^{(m)}}{d\xi} + [n(n+1)-2-4-\cdots-2m]P_n^{(m)} = 0$$

oder

(1) $$(1-\xi^2)\frac{d^2P_n^{(m)}}{d\xi^2} - 2(m+1)\xi\frac{dP_n^{(m)}}{d\xi} + [n(n+1)-m(m+1)]P_n^{(m)} = 0$$

$$(m = 0, 1, 2, \ldots).$$

Wir setzen mit Hobson[1])

(2) $$P_n^m(\cos\vartheta) = (-1)^m \sin^m\vartheta\, P_n^{(m)}(\cos\vartheta)$$

und nennen P_n^m eine zugeordnete Legendresche Funktion m-ter Ordnung. Es ist also ein Polynom $(n-m)$-ten Grades in ξ, multipliziert mit $(1-\xi^2)^{\frac{m}{2}}$. Da $P_n(\xi)$ n einfache, zwischen -1 und $+1$ gelegene Null-

[1]) E. W. Hobson, The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics, Cambridge University Press 1931 (im folgenden mit H bezeichnet), S. 90.

stellen hat und zwischen zwei solchen Nullstellen immer mindestens eine Nullstelle der Ableitung liegen muß, so hat $P_n^{(m)}(\xi)$ und, abgesehen von ± 1, auch $P_n^m(\xi)$ gerade $n - m$ einfache, zwischen -1 und $+1$ gelegene Nullstellen. Diese Nullstellen liegen spiegelbildlich zum Nullpunkt. Denn nach (13·4) hat man

$$P_n^{(m)}(-\xi) = (-1)^{m+n} P_n^{(m)}(\xi).$$

Es ist

(3) $$P_n^0(\xi) = P_n(\xi) \quad \text{und} \quad P_n^m(\xi) = 0 \quad \text{für} \quad m > n.$$

Um eine Differentialgleichung herzuleiten, der $P_n^m(\xi)$ genügt, bilden wir

$$P_n^{(m)} = \frac{(-1)^m P_n^m}{\sin^m \vartheta},$$

$$\frac{dP_n^{(m)}}{d\xi} = \frac{(-1)^{m+1}}{\sin^{m+1}\vartheta} \frac{dP_n^m}{d\vartheta} + \frac{(-1)^m m \cos\vartheta}{\sin^{m+2}\vartheta} P_n^m,$$

$$\frac{d^2 P_n^{(m)}}{d\xi^2} = \frac{(-1)^m}{\sin^{m+2}\vartheta} \frac{d^2 P_n^m}{d\vartheta^2} + \frac{(-1)^{m+1}(2m+1)\cos\vartheta}{\sin^{m+3}\vartheta} \frac{dP_n^m}{d\vartheta} + \frac{(-1)^m m[1 + (m+1)\cos^2\vartheta]}{\sin^{m+4}\vartheta} P_n^m;$$

gemäß (1) ist daher

$$\frac{d^2 P_n^m}{d\vartheta^2} + \frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta} \frac{dP_n^m}{d\vartheta} + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2\vartheta}\right] P_n^m = 0.$$

Diese Differentialgleichung läßt sich in der Gestalt

$$\frac{1}{\sin\vartheta} \frac{d}{d\vartheta}\left(\sin\vartheta \frac{dP_n^m}{d\vartheta}\right) + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2\vartheta}\right] P_n^m = 0$$

oder wegen $\frac{d\xi}{d\vartheta} = -\sin\vartheta$ auch in der Form

$$\frac{d}{d\xi}\left[(1-\xi^2) \frac{dP_n^m}{d\xi}\right] + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-\xi^2}\right] P_n^m = 0$$

oder

(4) $$(1-\xi^2) \frac{d^2 P_n^m}{d\xi^2} - 2\xi \frac{dP_n^m}{d\xi} + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-\xi^2}\right] P_n^m = 0$$

schreiben.

19. Integraldarstellung der zugeordneten Legendreschen Funktionen. Wegen $\sin\vartheta = \sqrt{1-\xi^2}$ erhalten wir aus (18·2) und (14·1)

(1) $$P_n^m(\xi) = \frac{(-1)^m (n+m)!\,(1-\xi^2)^{\frac{m}{2}}}{2^{n+1} \pi i\, n!} \int\limits_{C'} \frac{(z^2-1)^n}{(z-\xi)^{n+m+1}} dz.$$

Wir führen nun wie in Ziffer 15 die neue Veränderliche φ durch $z = \xi + \sqrt{\xi^2 - 1}\, e^{i\varphi}$ ein, wobei wir $\xi > 1$ voraussetzen. Dann erhalten wir wie dort

$$(2)\qquad \frac{(\xi^2-1)^{\frac{m}{2}}}{2^{n+1}\pi i}\int\limits_K \frac{(z^2-1)^n}{(z-\xi)^{n+m+1}}\,dz = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}\left(\xi + \sqrt{\xi^2-1}\cos\varphi\right)^n e^{-mi\varphi}\,d\varphi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}\left(\xi + \sqrt{\xi^2-1}\cos\varphi\right)^n (\cos m\varphi - i\sin m\varphi)\,d\varphi$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\left(\xi + \sqrt{\xi^2-1}\cos\varphi\right)^n \cos m\varphi\,d\varphi .$$

Um diese Formel auf Gleichung (1) anzuwenden, in der $-1 \leqq \xi \leqq +1$ ist, lassen wir ξ den Punkt 1 im positiven Sinn von einem Werte > 1 zu einem solchen zwischen -1 und $+1$ umlaufen. Dann tritt $i\sqrt{1-\xi^2}$ an Stelle von $\sqrt{\xi^2-1}$, und wir erhalten aus (1) und (2)

$$(3)\qquad P_n^m(\xi) = \frac{(n+m)!\, i^m}{n!\,\pi}\int\limits_0^{\pi}\left(\xi + i\sqrt{1-\xi^2}\cos\varphi\right)^n \cos m\varphi\,d\varphi$$

oder

$$(4)\qquad P_n^m(\cos\vartheta) = \frac{(n+m)!\, i^m}{n!\,\pi}\int\limits_0^{\pi}(\cos\vartheta + i\sin\vartheta\cos\varphi)^n \cos m\varphi\,d\varphi .$$

Aus den Formeln für die Koeffizienten der FOURIERschen Reihenentwicklung

$$\left(\xi + \sqrt{\xi^2-1}\cos\varphi\right)^n = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos m\varphi$$

folgt

$$a_m = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\left(\xi + \sqrt{\xi^2-1}\cos\varphi\right)^n \cos m\varphi\,d\varphi \quad (m = 0, 1, 2, \ldots).$$

(2), (1) und (18·2) liefern daher folgende auf E. HEINE[1]) zurückgehende Beziehung

$$(5)\qquad \left(\xi + \sqrt{\xi^2-1}\cos\varphi\right)^n = P_n(\xi) + 2n!\sum_{m=1}^{n}\frac{(\xi^2-1)^{\frac{m}{2}} P_n^{(m)}(\xi)\cos m\varphi}{(n+m)!}.$$

20. Zusammenhang mit den Besselschen Funktionen. Wir wollen den Grenzwert von $P_n^m\left(\cos\frac{\vartheta}{n}\right)$ für $n \to +\infty$ berechnen und verwenden dazu

[1]) E. HEINE, Diss. Berlin 1842.

Formel (19·4). Es ist danach

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^m n!}{(n+m!)} P_n^m\left(\cos\frac{\vartheta}{n}\right) = \frac{1}{\pi i^m} \lim_{n\to+\infty} \int_0^\pi e^{n\ln\left(\cos\frac{\vartheta}{n}+i\sin\frac{\vartheta}{n}\cos\varphi\right)} \cos m\varphi\, d\varphi .$$

Nun ist $\frac{1}{z}\ln[\cos(\vartheta z) + i\sin(\vartheta z)\cos\varphi]$ eine analytische Funktion von z, und zwar auch für $z = 0$, falls wir die Funktion dort durch ihren Grenzwert definieren. Dieser ergibt sich durch Differenzieren von Zähler und Nenner zu

$$\lim_{z\to 0} \frac{-\vartheta\sin(\vartheta z) + i\vartheta\cos(\vartheta z)\cos\varphi}{\cos(\vartheta z) + i\sin(\vartheta z)\cos\varphi} = i\vartheta\cos\varphi ,$$

somit ist

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^m n!}{(n+m)!} P_n^m\left(\cos\frac{\vartheta}{n}\right) = \frac{1}{\pi i^m}\int_0^\pi e^{i\vartheta\cos\varphi}\cos m\varphi\, d\varphi$$

$$= \frac{1}{2\pi i^m}\left[\int_0^\pi e^{i(m\varphi+\vartheta\cos\varphi)}\, d\varphi + \int_0^\pi e^{i(-m\varphi+\vartheta\cos\varphi)}\, d\varphi\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi i^m}\int_{-\pi}^{+\pi} e^{i(m\varphi+\vartheta\cos\varphi)}\, d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{i(m\psi-\vartheta\sin\psi)}\, d\psi ,$$

wobei $\varphi = \psi + \frac{\pi}{2}$ gesetzt wurde. Nun ist aber

$$\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{i(m\psi-\vartheta\sin\psi)}\, d\psi = \int_{-\pi}^{+\pi} e^{i(m\psi-\vartheta\sin\psi)}\, d\psi$$

wegen der Periodizität von $e^{i\psi}$ und $\sin\psi$, daher nach einer bekannten Formel aus der Lehre von den BESSELschen Funktionen[1])

$$\text{(1)}\qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^m n!}{(n+m)!} P_n^m\left(\cos\frac{\vartheta}{n}\right) = J_m(\vartheta) .$$

Wir können diese Beziehung auch anders schreiben, wenn wir berücksichtigen, daß gemäß der STIRLINGschen Formel (II, 5·9)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!\, n^m}{(n+m)!} = 1$$

ist, nämlich

$$\text{(2)}\qquad \lim_{n\to+\infty} n^{-m} P_n^m\left(\cos\frac{\vartheta}{n}\right) = (-1)^m J_m(\vartheta) ,$$

---

[1]) Siehe z. B. J. LENSE, Reihenentwicklungen in der mathematischen Physik, 2. Aufl., Berlin 1947, W. de Gruyter (im folgenden mit L bezeichnet), S. 96.

also insbesondere

(3) $$\lim_{n\to+\infty} P_n\left(\cos\frac{\vartheta}{n}\right) = J_0(\vartheta).$$

(2) stammt von HEINE[1]), (3) findet sich schon bei MEHLER[2]).

21. Integraleigenschaften. Wir erinnern daran (Ziffer 17), daß ± 1 Nullstellen der ersten $n-1$ Ableitungen von $(x^2-1)^n$ sind. Damit erhalten wir durch teilweise Integration

$$\int_{-1}^{+1} \frac{d^m(x^2-1)^m}{dx^m}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}dx = -\int_{-1}^{+1}\frac{d^{m-1}(x^2-1)^m}{dx^{m-1}}\frac{d^{n+1}(x^2-1)^n}{dx^{n+1}}dx$$

$$= \int_{-1}^{+1}\frac{d^{m-2}(x^2-1)^m}{dx^{m-2}}\frac{d^{n+2}(x^2-1)^n}{dx^{n+2}}dx = \cdots$$

$$= (-1)^m \int_{-1}^{+1}(x^2-1)^m\frac{d^{n+m}(x^2-1)^n}{dx^{n+m}}dx;$$

daher ist das Integral gleich Null für $m > n$, dagegen ergibt sich für $m = n$ mit $x = \cos t$

$$(-1)^n \int_{-1}^{+1}(x^2-1)^n\frac{d^{2n}(x^2-1)^n}{dx^{2n}}dx = (-1)^n(2n)!\int_{-1}^{+1}(x^2-1)^n dx$$

$$= 2(2n)!\int_0^1(1-x^2)^n dx = 2(2n)!\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}t\,dt.$$

Nun ist

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}t\,dt = \Big[-\sin^{2n}t\cos t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + 2n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-1}t\cos^2 t\,dt$$

$$= 2n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-1}t\,dt - 2n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}t\,dt,$$

somit wird

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}t\,dt = \frac{2n}{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-1}t\,dt$$

$$= \frac{2n(2n-2)}{(2n+1)(2n-1)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-3}t\,dt$$

$$= \cdots$$

$$= \frac{2n(2n-2)\cdots 2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 3}$$

---

[1]) E. HEINE, J. reine angew. Math. 69 (1868) 128.

[2]) G. MEHLER, J. reine angew. Math. 68 (1868) 140.

und

$$\int_{-1}^{+1} \left[\frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n}\right]^2 dx = 2(2n)!\,\frac{2\cdot 4\cdots 2n}{3\cdot 5\cdots (2n+1)} = \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{2n+1}.$$

Daraus erhalten wir gemäß (14·2) die Orthogonalitätsbeziehungen der LEGENDREschen Polynome

$$\int_{-1}^{+1} P_m(\xi)\, P_n(\xi)\, d\xi = \begin{cases} 0 & \text{für } m \neq n, \\ \dfrac{2}{2n+1} & \text{für } m = n. \end{cases} \tag{1}$$

Nach (18·4) ist weiter

$$\begin{cases} (1-\xi^2)\dfrac{d^2 P_n^m}{d\xi^2} - 2\xi \dfrac{dP_n^m}{d\xi} + \left[n(n+1) - \dfrac{m^2}{1-\xi^2}\right] P_n^m = 0, \\ (1-\xi^2)\dfrac{d^2 P_r^m}{d\xi^2} - 2\xi \dfrac{dP_r^m}{d\xi} + \left[r(r+1) - \dfrac{m^2}{1-\xi^2}\right] P_r^m = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Wir multiplizieren die erste dieser Gleichungen mit P_r^m, die zweite mit P_n^m und subtrahieren. Dann ergibt sich

$$\frac{d}{d\xi}\left[(1-\xi^2)\left(P_r^m \frac{dP_n^m}{d\xi} - P_n^m \frac{dP_r^m}{d\xi}\right)\right] + (n-r)(n+r+1)\, P_n^m P_r^m = 0$$

oder durch Integration zwischen -1 und $+1$

$$\int_{-1}^{+1} P_n^m(\xi)\, P_r^m(\xi)\, d\xi = 0 \quad \text{für} \quad n \neq r. \tag{3}$$

Schreibt man in der zweiten der Gleichungen (2) n und r statt r und m, so erhält man auf gleiche Weise

$$\int_{-1}^{+1} \frac{P_n^m(\xi)\, P_n^r(\xi)}{1-\xi^2}\, d\xi = 0 \quad \text{für} \quad m \neq r. \tag{4}$$

Ferner ist

$$P_n^m = (-1)^m (1-\xi^2)^{\frac{m}{2}} P_n^{(m)},$$

$$\frac{dP_n^m}{d\xi} = (-1)^m (1-\xi^2)^{\frac{m}{2}} P_n^{(m+1)} + (-1)^{m+1} m\xi (1-\xi^2)^{\frac{m}{2}-1} P_n^{(m)},$$

$$P_n^{m+1} = (-1)^{m+1} (1-\xi^2)^{\frac{m+1}{2}} P_n^{(m+1)}$$

$$= -\left[(1-\xi^2)^{\frac{1}{2}} \frac{dP_n^m}{d\xi} + m\xi (1-\xi^2)^{-\frac{1}{2}} P_n^m\right],$$

daher durch teilweise Integration mit Berücksichtigung der Differentialgleichung (18·4) für P_n^m und der Beziehung $P_n^m(\pm 1) = 0$ für $m > 0$ ge-

mäß (18·2)

$$\int_{-1}^{+1}[P_n^{m+1}(\xi)]^2\,d\xi=\int_{-1}^{+1}\left\{(1-\xi^2)\left[\frac{dP_n^m(\xi)}{d\xi}\right]^2+2m\xi\left[P_n^m(\xi)\frac{dP_n^m(\xi)}{d\xi}\right]\right.$$

$$\left.+\frac{m^2\xi^2}{1-\xi^2}[P_n^m(\xi)]^2\right\}d\xi=-\int_{-1}^{+1}P_n^m(\xi)\frac{d}{d\xi}\left[(1-\xi^2)\frac{dP_n^m(\xi)}{d\xi}\right]d\xi$$

$$-m\int_{-1}^{+1}[P_n^m(\xi)]^2\,d\xi+\int_{-1}^{+1}\frac{m^2\xi^2}{1-\xi^2}[P_n^m(\xi)]^2\,d\xi$$

$$=\int_{-1}^{+1}\left[n(n+1)-\frac{m^2}{1-\xi^2}-m+\frac{m^2\xi^2}{1-\xi^2}\right][P_n^m(\xi)]^2\,d\xi$$

$$=(n-m)(n+m+1)\int_{-1}^{+1}[P_n^m(\xi)]^2\,d\xi,$$

somit

$$\int_{-1}^{+1}[P_n^m(\xi)]^2\,d\xi=(n-m+1)(n+m)\int_{-1}^{+1}[P_n^{m-1}(\xi)]^2\,d\xi=\cdots$$

$$=(n-m+1)(n-m+2)\cdots n(n+m)(n+m-1)\cdots(n+1)\int_{-1}^{+1}[P_n(\xi)]^2\,d\xi$$

$$=\frac{2}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}\qquad\text{nach (1)},$$

also nach (3) die Orthogonalitätsbeziehungen der zugeordneten LEGENDREschen Funktionen

$$\int_{-1}^{+1}P_n^m(\xi)\,P_r^m(\xi)\,d\xi=\begin{cases}0 & \text{für } n\neq r,\\ \dfrac{2}{2n+1}\dfrac{(n+m)!}{(n-m)!} & \text{für } n=r.\end{cases}\tag{5}$$

22. Normierte orthogonale Polynome. $F_0(x)$, $F_1(x)$, $F_2(x)$, ... seien Polynome von den Graden 0, 1, 2, ... mit reellen Koeffizienten. Wir nennen sie normiert orthogonal im Intervall $-1\leqq x\leqq+1$, wenn die Beziehungen gelten

$$\int_{-1}^{+1}F_m(x)\,F_n(x)\,dx=\begin{cases}0 & \text{für } m\neq n,\\ 1 & \text{für } m=n.\end{cases}$$

Durch diese Forderung sind die Polynome eindeutig bestimmt, wenn wir noch verlangen, daß die Koeffizienten der höchsten Potenz von x in jedem Polynom positiv sein sollen, und zwar ergeben sich bis auf konstante Faktoren die LEGENDREschen Polynome.

Offenbar muß dann $F_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ sein. Setzen wir $F_1(x) = c_0 + c_1 x$, so muß $\int_{-1}^{+1} F_0(x) F_1(x)\, dx = 0$, daher $c_0 \int_{-1}^{+1} dx + c_1 \int_{-1}^{+1} x\, dx = 0$ oder $c_0 = 0$ und $\int_{-1}^{+1} [F_1(x)]^2 dx = 1$, daher $c_1^2 \int_{-1}^{+1} x^2\, dx = 1$ oder $c_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}$ sein.

Setzen wir ferner $F_2(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$, so ergibt sich aus $\int_{-1}^{+1} F_0(x) F_2(x)\, dx = 0$ und $\int_{-1}^{+1} F_1(x) F_2(x)\, dx = 0$

$$\begin{cases} c_0 \int_{-1}^{+1} dx + c_1 \int_{-1}^{+1} x\, dx + c_2 \int_{-1}^{+1} x^2\, dx = 0, \\ c_0 \int_{-1}^{+1} x\, dx + c_1 \int_{-1}^{+1} x^2\, dx + c_2 \int_{-1}^{+1} x^3\, dx = 0 \end{cases}$$

oder $c_0 = -\frac{c_2}{3}$, $c_1 = 0$, also $F_2(x) = c_0 + c_2 x^2$. $\int_{-1}^{+1} [F_2(x)]^2\, dx = 1$ liefert dann $c_2 = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}$.

Für das nächste Polynom machen wir den Ansatz $F_3(x) = c_0 F_0(x) + c_1 F_1(x) + c_2 F_2(x) + c_3 x^3$. Er ist gerechtfertigt, da wir nach dem Vorhergehenden x^0, x^1, x^2 linear homogen durch $F_0(x), F_1(x), F_2(x)$ ausdrücken können. Wir erhalten die Bedingungen

$$\int_{-1}^{+1} F_0(x) F_3(x)\, dx = c_0 \int_{-1}^{+1} [F_0(x)]^2\, dx + c_3 \int_{-1}^{+1} F_0(x)\, x^3\, dx = 0,$$

$$\int_{-1}^{+1} F_1(x) F_3(x)\, dx = c_1 \int_{-1}^{+1} [F_1(x)]^2\, dx + c_3 \int_{-1}^{+1} F_1(x)\, x^3\, dx = 0,$$

$$\int_{-1}^{+1} F_2(x) F_3(x)\, dx = c_2 \int_{-1}^{+1} [F_2(x)]^2\, dx + c_3 \int_{-1}^{+1} F_2(x)\, x^3\, dx = 0.$$

Aus diesen Gleichungen lassen sich c_0, c_1, c_2 durch c_3 ausdrücken, und dann ergibt die Bedingung $\int_{-1}^{+1} [F_3(x)]^2\, dx = 1$ eindeutig $c_3 > 0$. Setzen wir nämlich c_0, c_1, c_2 als Funktionen von c_3 in $F_3(x)$ ein, so läßt sich c_3 herausheben und der übrigbleibende Faktor ist nicht identisch Null, weil er das Glied x^3 enthält, das in den drei ersten Summanden nicht vorkommt. In dieser Weise können wir fortfahren und die Polynome $F_n(x)$ eindeutig bestimmen. Da aber nach (21·1) die Polynome $\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\, P_n(x)$ unsere Forderungen erfüllen, muß $F_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}\, P_n(x)$ sein.

Lassen wir die Normierungsforderung $\int\limits_{-1}^{+1} [F_n(x)]^2\, dx = 1$ fallen, so bleibt in jedem Polynom $F_n(x)$ ein konstanter Faktor willkürlich, d. h. wir erhalten $F_n(x) = C_n P_n(x)$, wobei die C_n willkürliche Konstanten sind.

§ 4. Reihenentwicklungen nach Legendreschen Polynomen.

23. Zweiter Mittelwertsatz der Integralrechnung. Wir wollen in dieser Ziffer eine Formel der Integralrechnung ableiten, die weniger bekannt ist, die wir aber im folgenden öfter brauchen werden. Man bezeichnet sie auch als zweiten Mittelwertsatz, im Gegensatz zum ersten Mittelwertsatz der Integralrechnung, der bekanntlich folgendermaßen lautet: $f(x)$ und $g(x)$ seien stetig im Intervall $I\,(a \leqq x \leqq b)$ und $g(x)$ möge in I sein Zeichen nicht ändern. Dann gilt

$$\int\limits_a^b f(x)\, g(x)\, dx = f(\xi) \int\limits_a^b g(x)\, dx,$$

wobei ξ einen bestimmten, zwischen a und b gelegenen Wert bedeutet. Auch beim zweiten Mittelwertsatz werden $f(x)$ und $g(x)$ stetig vorausgesetzt, $g(x)$ aber jetzt monoton wachsend (im schwächeren Sinn, d. h. $g(x_2) \geqq g(x_1)$ für $x_2 > x_1$).

Wir teilen das Intervall I durch die Teilungspunkte x_ν in n Teile, d. h. es sei $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$. ξ_ν sei ein Punkt im ν-ten Intervall $x_{\nu-1} \leqq \xi_\nu \leqq x_\nu$, $\delta_\nu = x_\nu - x_{\nu-1}$ die Länge des ν-ten Intervalls. Ferner setzen wir zur Abkürzung $\sigma_\nu = f(\xi_\nu) - \frac{1}{\delta_\nu} \int\limits_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} f(x)\, dx$. Nach dem ersten Mittelwertsatz mit $g(x) = 1$ ist $\sigma_\nu = f(\xi_\nu) - f(\bar{\xi}_\nu)$, wobei $\bar{\xi}_\nu$ einen bestimmten Wert zwischen $x_{\nu-1}$ und x_ν bedeutet. Wir bilden nun

$$\begin{aligned}
(1)\qquad \sum_{\nu=1}^{n} f(\xi_\nu)\, g(\xi_\nu)\, \delta_\nu &= \sum_{\nu=1}^{n} g(\xi_\nu) \left[\int\limits_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} f(x)\, dx + \sigma_\nu \delta_\nu\right] \\
&= \sum_{\nu=1}^{n} g(\xi_\nu) \left[\int\limits_{x_{\nu-1}}^{b} f(x)\, dx - \int\limits_{x_\nu}^{b} f(x)\, dx + \sigma_\nu \delta_\nu\right]
\end{aligned}$$

$$= g(\xi_1) \int\limits_a^b f(x)\, dx + \sum_{\nu=2}^{n} [g(\xi_\nu) - g(\xi_{\nu-1})] \int\limits_{x_{\nu-1}}^{b} f(x)\, dx + \sum_{\nu=1}^{n} g(\xi_\nu)\, \sigma_\nu \delta_\nu .$$

$\int\limits_x^b f(u)\, du$ ist eine stetige Funktion von x im Intervall I, m und M seien ihr kleinster und größter Wert. Weil $g(x)$ in I monoton wächst, liegt die vorletzte Summe in der letzten Gleichung zwischen $m[g(\xi_n) - g(\xi_1)]$

und $M[g(\xi_n) - g(\xi_1)]$; sie ist also gleich $\bar{\mu}[g(\xi_n) - g(\xi_1)]$, wobei $m \leqq \bar{\mu} \leqq M$ ist. Nach dem Zwischenwertsatz für stetige Funktionen gibt es nun einen Wert $\bar{\xi}$ zwischen a und b, so daß $\bar{\mu} = \int\limits_{\bar{\xi}}^{b} f(u)\,du$ ist. Wegen der Stetigkeit von $g(x)$ sind alle $|g(\xi_\nu)| < G$ (G fest), ferner bei genügend feiner Einteilung alle $|\sigma_\nu| < \varepsilon$ (ε beliebig kleine positive Zahl), somit ist

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n} g(\xi_\nu)\,\sigma_\nu \delta_\nu\right| < G\varepsilon(b-a).$$

Beim Grenzübergang zu beliebig feinen Einteilungen strebt in Gleichung (1) die linke Seite der ersten Zeile gegen $\int\limits_a^b f(x) g(x)\,dx$, das erste Glied der dritten Zeile gegen $g(a)\int\limits_a^b f(x)\,dx$, das letzte gegen Null, infolgedessen auch das mittlere, d. h. $[g(\xi_n) - g(\xi_1)]\int\limits_{\bar{\xi}}^{b} f(u)\,du$ gegen einen bestimmten Grenzwert. Der erste Faktor dieses Ausdruckes strebt gegen $g(b) - g(a)$. Ist diese Differenz von Null verschieden, so ergibt sich daraus, daß auch der zweite einem bestimmten Grenzwert μ zustrebt, wobei $m \leqq \mu \leqq M$ ist. Weil das Integral stetig von seiner unteren Grenze abhängt, läßt sich μ in der Gestalt $\int\limits_{\xi}^{b} f(x)\,dx$ darstellen, wobei $a \leqq \xi \leqq b$ ist. Man hat daher

$$\int\limits_a^b f(x)\,g(x)\,dx = g(a)\int\limits_a^b f(x)\,dx + [g(b) - g(a)]\int\limits_{\xi}^{b} f(x)\,dx$$
$$= g(a)\int\limits_a^{\xi} f(x)\,dx + g(b)\int\limits_{\xi}^{b} f(x)\,dx,$$

wobei $a \leqq \xi \leqq b$ ist.

Dies ist der zweite Mittelwertsatz der Integralrechnung. Er gilt auch, wenn $g(x)$ im Intervall I monoton abnimmt, denn durch Multiplikation mit -1 erhalten wir in $-g(x)$ eine monoton zunehmende Funktion. Ebenso kann $a > b$ sein, wie sich durch Vertauschung der Grenzen ergibt. Für $g(a) = g(b)$ ist $g(x)$ konstant, der Satz somit ebenfalls richtig.

24. Asymptotische Abschätzungen. Wir werden im folgenden einige Abschätzungen für die absoluten Beträge der LEGENDREschen Polynome brauchen, die wir bereits jetzt im Zusammenhang entwickeln wollen. Zuerst eine Hilfsformel. Nach dem TAYLORschen Satz ist $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} e^{\vartheta x}$ für alle reellen x, wobei $0 < \vartheta < 1$ ist, somit $e^x \geqq 1 + x$, weil $e^{\vartheta x} > 0$ ist. Setzen wir $x = \frac{\gamma}{m}$ mit positivem ganzem $m \geqq -\gamma$, so ist $\left(1 + \frac{\gamma}{m}\right)^m \leqq e^\gamma$.

Daraus erhalten wir für reelles α und β und positives ganzes n

$$(1)\qquad \left|1-\frac{\alpha+\beta i}{n}\right|^n=\left(1-\frac{2\alpha}{n}+\frac{\alpha^2+\beta^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}}\leqq e^{-\alpha+\frac{\alpha^2+\beta^2}{2n}},$$

wenn $n \geqq 2\alpha - \frac{\alpha^2+\beta^2}{n}$ ist.

Nun verwenden wir Formel (15·2). Wir zerlegen das Integral in $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$ und führen im zweiten die Veränderliche $\psi = \pi - \varphi$ ein. Dann wird

$$P_n(\xi)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(\xi+i\sqrt{1-\xi^2}\cos\varphi)^n\,d\varphi+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(\xi-i\sqrt{1-\xi^2}\cos\varphi)^n\,d\varphi$$

$$=\Re\,\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(\xi+i\sqrt{1-\xi^2}\cos\varphi)^n\,d\varphi.$$

Wir setzen $z=\xi+i\sqrt{1-\xi^2}$. Mit Rücksicht auf $-1\leqq\xi\leqq+1$ erhalten wir also $|z|=1$, $z^{-1}=\xi-i\sqrt{1-\xi^2}$, $\xi=\frac{1}{2}(z+z^{-1})$, $i\sqrt{1-\xi^2}=\frac{1}{2}(z-z^{-1})$, $\xi+i\sqrt{1-\xi^2}\cos\varphi=z\cos^2\frac{\varphi}{2}+z^{-1}\sin^2\frac{\varphi}{2}$.

An Stelle von φ führen wir die neue Veränderliche $u=\sqrt{n}\sin\frac{\varphi}{2}$ ein. Mit der Abkürzung

$$x^2=1-z^{-2}=2(1-\xi^2)+2i\xi\sqrt{1-\xi^2}$$

folgt dann

$$\xi+i\sqrt{1-\xi^2}\cos\varphi=z\left(1-x^2\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)=z\left(1-\frac{x^2u^2}{n}\right),$$

somit

$$P_n(\xi)=\Re\,\frac{4z^n}{\pi\sqrt{n}}\int\limits_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2n}}\left(1-\frac{x^2u^2}{n}\right)^n\frac{du}{\sqrt{1-\frac{u^2}{n}}}$$

und

$$|P_n(\xi)|<\frac{4\sqrt{2}}{\pi\sqrt{n}}\int\limits_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2n}}\left|1-\frac{x^2u^2}{n}\right|^n du,$$

weil im Integral $1-\frac{u^2}{n}\geqq\frac{1}{2}$ ist. Nun verwenden wir die Hilfsformel (1). Wir setzen $x^2u^2=\alpha+\beta i$, wobei $\alpha=2(1-\xi^2)u^2$, $\beta=2\xi\sqrt{1-\xi^2}\,u^2$ ist;

dann wird

(2) $$\alpha^2 + \beta^2 = 4(1-\xi^2)u^4,$$

$$\alpha - \frac{\alpha^2+\beta^2}{2n} = 2(1-\xi^2)u^2\left(1-\frac{u^2}{n}\right) \geqq (1-\xi^2)u^2.$$

Schreiben wir zur Abkürzung $u^2 = v$, so ist $0 \leqq v \leqq \frac{n}{2}$ im Integrationsintervall $0 \leqq u \leqq \sqrt{\frac{n}{2}}$. Die Funktion $v\left(1-\frac{v}{n}\right)$ nimmt ihren größten Wert, nämlich $\frac{n}{4}$, für $v = \frac{n}{2}$ an. Ferner ist $1-\xi^2 \leqq 1$, also $2\alpha - \frac{\alpha^2+\beta^2}{n} \leqq n$ nach (2). Es wird infolgedessen

(3) $$|P_n(\xi)| < \frac{4}{\pi}\sqrt{\frac{2}{n}}\int\limits_0^{\sqrt{\frac{n}{2}}} e^{-(1-\xi^2)u^2}\,du$$

$$< \frac{4}{\pi}\sqrt{\frac{2}{n}}\int\limits_0^{\infty} e^{-(1-\xi^2)u^2}\,du = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{n\pi(1-\xi^2)}}.$$

Formel (12·7) liefert uns jetzt eine Abschätzung für $|P_n'(\xi)|$. Für $n \geqq 2$ ist nämlich

$$n\,|P_{n-1}(\xi)| < \frac{2\sqrt{2n}}{\sqrt{(n-1)\pi(1-\xi^2)}} = \frac{2\sqrt{2n}}{\sqrt{\pi(1-\xi^2)}}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-\frac{1}{2}} < \frac{3\sqrt{2n}}{\sqrt{\pi(1-\xi^2)}},$$

also

(4) $$|P_n'(\xi)| \leqq \frac{n(|P_n(\xi)| + |P_{n-1}(\xi)|)}{1-\xi^2} < \frac{5\sqrt{2n}}{\sqrt{\pi}(1-\xi^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Die Abschätzungen dieser Ziffer gehen auf H. Burkhardt[1]) zurück.

25. Entwicklung nach Legendreschen Polynomen. Die Funktion $f(x)$ möge folgende Eigenschaften haben: Das Intervall $I\,(-1 \leqq x \leqq +1)$ soll sich in eine endliche Anzahl von Teilintervallen zerlegen lassen, so daß $f(x)$ im Innern jedes dieser Teilintervalle stetig und monoton ist; die Funktion hat also höchstens eine endliche Anzahl von Unstetigkeitsstellen. Wenn die Funktion in einer Umgebung einer Unstetigkeitsstelle x_0 beschränkt ist, sollen ihr rechtsseitiger und linksseitiger Grenzwert $\lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h)$ und $\lim\limits_{h\to 0} f(x_0-h)$ vorhanden sein $(h > 0)$. Fällt x_0 mit einem der Endpunkte des Intervalls zusammen, so wird sinngemäß nur das Vorhandensein eines der beiden Grenzwerte gefordert. Bleibt $f(x)$ nicht überall im Inter-

[1]) H. Burkhardt, S.-B. math. nat. Abt. Bayer. Akad. Wiss. München 1909, 10. Abhandlung.

vall beschränkt, so soll $\frac{|f(x)|}{\sqrt{1-x^2}}$ integrierbar sein. Dann sind auch $|f(x)|$ und $|f(x)\,P_n(x)|$ integrierbar.

Ließe sich $f(x)$ in I in eine gleichmäßig konvergente Reihe nach LEGENDREchen Polynomen entwickeln

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu P_\nu(x), \tag{1}$$

so könnten wir die Koeffizienten c_ν in folgender Weise bestimmen: Wir multiplizieren die Gleichung (1) mit $P_n(x)$ und integrieren hierauf von -1 bis $+1$. Formel (21·1) liefert dann

$$c_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \int_{-1}^{+1} f(x)\,P_n(x)\,dx \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{2}$$

Um die Möglichkeit einer derartigen Entwicklung zu erkennen, berechnen wir die mit den Koeffizienten (2) gebildeten Teilsummen der Reihe (1), also

$$s_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \left(\nu + \frac{1}{2}\right) P_\nu(x) \int_{-1}^{+1} f(u)\,P_\nu(u)\,du = \int_{-1}^{+1} S_n(x, u)\,f(u)\,du, \tag{3}$$

wenn wir zur Abkürzung

$$S_n(x, u) = \sum_{\nu=0}^{n} \left(\nu + \frac{1}{2}\right) P_\nu(x)\,P_\nu(u) \tag{4}$$

setzen. Nach Formel (12·1) ist

$$(2\nu + 1)\,x\,P_\nu(x) = (\nu + 1)\,P_{\nu+1}(x) + \nu\,P_{\nu-1}(x),$$
$$(2\nu + 1)\,u\,P_\nu(u) = (\nu + 1)\,P_{\nu+1}(u) + \nu\,P_{\nu-1}(u);$$

daher, wenn wir die erste dieser beiden Gleichungen mit $P_\nu(u)$, die zweite mit $P_\nu(x)$ multiplizieren, und sie dann voneinander abziehen,

$$(2\nu + 1)(x - u)\,P_\nu(x)\,P_\nu(u) = (\nu + 1)\,[P_{\nu+1}(x)\,P_\nu(u) - P_\nu(x)\,P_{\nu+1}(u)]$$
$$- \nu\,[P_\nu(x)\,P_{\nu-1}(u) - P_{\nu-1}(x)\,P_\nu(u)],$$

somit gemäß der Bemerkung am Schluß von Ziffer 12

$$S_n(x, u) = \frac{n+1}{2}\,\frac{P_{n+1}(x)\,P_n(u) - P_n(x)\,P_{n+1}(u)}{x - u}. \tag{5}$$

Diese Formel stammt von CHRISTOFFEL[1]). Damit erhalten wir

$$s_n(x) = \frac{n+1}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{P_{n+1}(x)\,P_n(u) - P_n(x)\,P_{n+1}(u)}{x - u}\,f(u)\,du. \tag{6}$$

[1]) Siehe Anmerkung in Ziffer 12.

Es handelt sich nun um die Konvergenz dieses Ausdruckes mit $n \to +\infty$ für ein beliebiges x im Innern von I, in dessen Umgebung $f(x)$ beschränkt bleibt, bzw. um die gleichmäßige Konvergenz für ein im Innern von I gelegenes abgeschlossenes Intervall $I_0(x_1 \leqq x \leqq x_2)$, in dem $f(x)$ überall stetig ist. Um die nötigen Abschätzungen durchführen zu können, muß man das Integrationsintervall $-1 \leqq u \leqq +1$ in verschiedene Teilintervalle zerlegen. Es sind getrennt zu behandeln (Abb. 4):

a) die Umgebungen der Punkte -1 und $+1$,
b) die Umgebung des Punktes x selbst,
c) die Umgebung etwaiger vorhandener Unstetigkeitsstellen der Funktion $f(u)$,
d) die übrigbleibenden Stetigkeitsbereiche von $f(u)$.

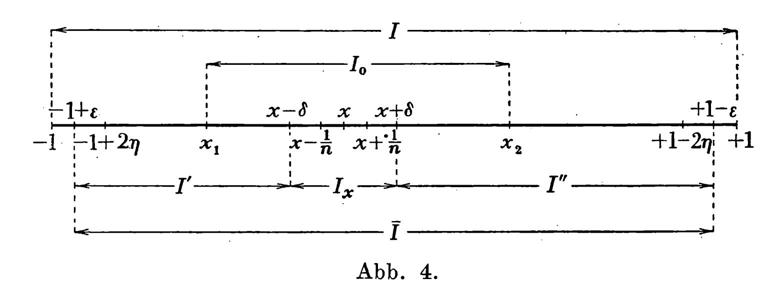


Abb. 4.

26. Untersuchung der Endpunkte. Wir gehen zuerst an die Aufgabe a) und wählen zu diesem Zweck eine positive Zahl η, so daß

(1) $$-1 + 2\eta < x < 1 - 2\eta$$

bzw. $$-1 + 2\eta < x_1 \leqq x \leqq x_2 < 1 - 2\eta$$

ist. Nach (24·3) ist

(2) $$\sqrt{n(1-x^2)}\,|P_n(x)| < k \qquad (k \text{ fest})$$

für alle n und alle x des Intervalls I, daher wird

(3) $$\left|\sqrt{n+1}\int\limits_{-1}^{-1+\varepsilon} \frac{P_n(u)}{x-u} f(u)\,du\right| < \frac{2k}{\eta}\int\limits_{-1}^{-1+\varepsilon} \frac{|f(u)|}{\sqrt{1-u^2}}\,du\,,$$

wenn nur $0 < \varepsilon < \eta$ ist, da dann nach (1) im Integrationsintervall $x - u > \eta$ ist. Das letzte Integral läßt sich aber bei gegebenem η durch geeignete Wahl von ε beliebig klein machen, weil $\frac{|f(u)|}{\sqrt{1-u^2}}$ integrierbar ist. ε hängt also von η ab. Dabei können und wollen wir ε immer so wählen, daß $f(u)$ für $-1 < u \leqq -1 + \varepsilon$ stetig ist. Entsprechendes gilt für $\left|\sqrt{n+1}\int\limits_{-1}^{-1+\varepsilon} \frac{P_{n+1}(u)}{x-u} f(u)\,du\right|$

und für die Beiträge des Intervalls $1-\varepsilon \leqq u \leqq 1$ zu $s_n(x)$, ebenso wie für

$$\left|\int_{-1}^{-1+\varepsilon} S_n(x, u)\, du\right| \quad \text{und} \quad \left|\int_{1-\varepsilon}^{1} S_n(x, u)\, du\right|,$$

da man hierfür nur $f(u)=1$ zu setzen braucht, um die eben durchgeführten Überlegungen übertragen zu können. Die von den Umgebungen der Punkte -1 und $+1$ herrührenden Beiträge zu $s_n(x)$ und $\int_{-1}^{+1} S_n(x, u)\, du$ werden also dem Betrage nach beliebig klein, wenn nur ε klein genug gewählt wird, wobei ε von n und von der Lage des Punktes x in I_0 nicht abhängt.

27. Untersuchung der Unendlichkeitsstellen. Die nach b) ebenfalls gesondert zu behandelnde Umgebung von $u = x$ sei nun durch das Intervall $I_x (x-\delta \leqq u \leqq x+\delta)$ gegeben, wobei $\delta > 0$ so gewählt sein soll, daß I_x im Innern des Intervalls $\bar{I}(-1+\varepsilon \leqq u \leqq 1-\varepsilon)$ liegt und $f(u)$ in den Intervallen $x-\delta \leqq u < x$ und $x < u \leqq x+\delta$ stetig und monoton ist.

Wir untersuchen zunächst die restlichen Intervalle $I'(-1+\varepsilon \leqq u \leqq x-\delta)$ und $I''(x+\delta \leqq u \leqq 1-\varepsilon)$, d. h. die Bereiche c) und d).

Nach (24·3) ist

$$(1) \qquad |P_n(u)| < \frac{K}{\sqrt{n}} \quad \text{für alle } u \text{ in } \bar{I},$$

wobei K von n und u nicht abhängt, wohl aber von ε (also auch von η). Es ist hiermit nach (25·5) für alle u in I' oder I''

$$(2) \qquad |S_n(x, u)| < \frac{n+1}{2\delta} \frac{2K^2}{\sqrt{n(n+1)}} < K',$$

wobei K' von n, x und u nicht abhängt, wohl aber von δ, ε und η.

$\alpha \leqq u \leqq \beta$ sei ein Intervall $\bar{\bar{I}}$ aus I' oder I''. Dann liefert der zweite Mittelwertsatz von Ziffer 23

$$(3) \qquad \int_\alpha^\beta S_n(x, u)\, du = \frac{n+1}{2}\left[P_{n+1}(x)\int_\alpha^\beta \frac{P_n(u)}{x-u}\, du - P_n(x)\int_\alpha^\beta \frac{P_{n+1}(u)}{x-u}\, du\right]$$

$$= \frac{n+1}{2}\left[\frac{P_{n+1}(x)}{x-\alpha}\int_\alpha^{\xi_1} P_n(u)\, du + \frac{P_{n+1}(x)}{x-\beta}\int_{\xi_1}^\beta P_n(u)\, du - \frac{P_n(x)}{x-\alpha}\int_\alpha^{\xi_2} P_{n+1}(u)\, du - \frac{P_n(x)}{x-\beta}\int_{\xi_2}^\beta P_{n+1}(u)\, du\right],$$

wobei ξ_1 und ξ_2 zwischen α und β liegen, die Grenzen eingeschlossen. Gemäß (12·5) ist

$$(4)\qquad \int_a^b P_n(u)\,du = \frac{1}{2n+1}\left[P_{n+1}(b) - P_{n+1}(a) - P_{n-1}(b) + P_{n-1}(a)\right],$$

also wegen (1) z. B.

$$\left|\frac{n+1}{2}\,\frac{P_{n+1}(x)}{x-\alpha}\int_\alpha^{\xi_1} P_n(u)\,du\right| < \frac{K''}{\delta n},$$

wobei K'' nur von ε und η abhängt. Entsprechendes gilt für die drei übrigen Integrale in (3). Es folgt somit

$$(5)\qquad \lim_{n\to+\infty}\int_\alpha^\beta S_n(x,u)\,du = 0,$$

und zwar gleichmäßig für alle x in I_0 und alle Intervalle $\overline{\overline{I}}$ in I' oder I'', d. h. man kann den Betrag des Integrals durch Wahl von n beliebig klein machen, wobei n nur von δ, ε und η abhängt.

In I' und I'' seien m Punkte vorhanden, in deren Umgebung $f(u)$ nicht beschränkt bleibt. Wir schließen diese Punkte durch Intervalle i_μ von der Länge l_μ ($\mu = 1, 2, \ldots, m$) aus, die ganz in I' und I'' liegen und keine gemeinsamen Punkte haben. Für das μ-te dieser Intervalle haben wir nach (2)

$$\left|\int_{i_\mu} S_n(x,u)\,f(u)\,du\right| \leqq K'\int_{i_\mu} |f(u)|\,du,$$

d. h. es kann

$$\left|\sum_{\mu=1}^{m}\int_{i_\mu} S_n(x,u)\,f(u)\,du\right|$$

beliebig klein gemacht werden, wenn man die l_μ genügend klein wählt, da $|f(u)|$ integrierbar ist. Die Wahl der l_μ hängt aber von δ, ε und η ab, weil K' von diesen Größen abhängt, dagegen nicht von n und von der Lage des Punktes x in I_0. Damit haben wir Aufgabe c) erledigt.

28. Untersuchung der Stetigkeitsintervalle. Wir wenden uns nun zur Aufgabe d). Nachdem wir aus I' und I'' die Intervalle i_μ ausgeschlossen haben, können wir die restlichen Intervalle von I' und I'' in eine endliche Anzahl von Intervallen I_λ ($\lambda = 1, 2, \ldots, N$) zerlegen, so daß $f(u)$ im Innern eines jeden Intervalls I_λ stetig und monoton ist. Es sei $a \leqq u \leqq b$ ein solches Intervall und $a < a' < b' < b$. Es ist

$$\int_a^b S_n(x,u)\,f(u)\,du = \lim_{\substack{a'\to a\\ b'\to b}}\int_{a'}^{b'} S_n(x,u)\,f(u)\,du,$$

weil $f(u)$ in I_λ beschränkt bleibt. Für die Bildung von $\int_a^b S_n(x,u) f(u)\,du$ können wir uns also $f(u)$ in den Endpunkten a und b des Integrationsintervalls durch $\lim\limits_{h\to 0} f(a+h)$ und $\lim\limits_{h\to 0} f(b-h)$ mit $h>0$ definiert denken. Nach dem zweiten Mittelwertsatz der Integralrechnung ist daher

$$\int_a^b S_n(x,u) f(u)\,du = \lim_{h\to 0} f(a+h)\int_a^\xi S_n(x,u)\,du + \lim_{h\to 0} f(b-h)\int_\xi^b S_n(x,u)\,du,$$

wobei $a \leqq \xi \leqq b$ ist. Da $f(u)$ in I_λ beschränkt ist, folgt nach (27·5)

$$(1) \qquad \lim_{n\to+\infty}\int_a^b S_n(x,u) f(u)\,du = 0,$$

und zwar gleichmäßig für alle x in I_0 und alle Intervalle I_λ in I' und I''. Dabei ist aber noch folgendes zu bemerken: Die Schranke von $f(u)$ hängt von der Länge $\sum\limits_{\mu=1}^{m} l_\mu$ der ausgeschlossenen Intervalle i_μ, d. h. von δ, ε und η ab, somit kann man den Betrag des Integrals in (1) durch passende Wahl von n beliebig klein machen, wobei n nicht von x, a und b, wohl aber von δ, ε und η abhängt.

Haben α und β die in der vorigen Ziffer angegebene Bedeutung, so setzt sich $\int_\alpha^\beta S_n(x,u) f(u)\,du$ aus einer endlichen Anzahl von Integralen über Intervalle i_μ und I_λ zusammen, infolgedessen ist

$$(2) \qquad \lim_{n\to+\infty}\int_\alpha^\beta S_n(x,u) f(u)\,du = 0,$$

und zwar gleichmäßig für alle x in I_0 und alle Intervalle $\overline{\overline{I}}$ in I' und I''.

29. Untersuchung der Umgebung des Punktes x. Wir haben jetzt noch die Aufgabe b) zu lösen, d. h. $\int_{x-\delta}^{x+\delta} S_n(x,u) f(u)\,du$ zu untersuchen. Wir betrachten zuerst $\int_{x-\delta}^{x} S_n(x,u) f(u)\,du$. Mit $h>0$ ist

$$(1) \qquad \int_{x-\delta}^{x} S_n(x,u) f(u)\,du = \lim_{h\to 0} f(x-h)\int_{x-\delta}^{x} S_n(x,u)\,du + \int_{x-\delta}^{x} S_n(x,u)\left[f(u) - \lim_{h\to 0} f(x-h)\right] du.$$

Um $\int_{x-\delta}^{x} S_n(x,u)\,du$ zu berechnen, gehen wir so vor: Nach (25·4), (13·1),

(27·4), (10·4) und (27·1) ist

$$(2)\qquad \int_{-1}^{x} S_n(x,u)\,du = \sum_{\nu=0}^{n}\left(\nu+\frac{1}{2}\right)P_\nu(x)\int_{-1}^{x} P_\nu(u)\,du$$

$$= \frac{1}{2}(x+1)+\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n} P_\nu(x)\,[P_{\nu+1}(x)-P_{\nu-1}(x)]$$

$$= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}P_n(x)\,P_{n+1}(x)\to\frac{1}{2}\quad \text{für } n\to+\infty,$$

und zwar gleichmäßig für alle x in $\bar{I}$. Weiter ist

$$(3)\qquad \int_{-1}^{x-\delta} S_n(x,u)\,du = \int_{-1}^{-1+\varepsilon} S_n(x,u)\,du + \int_{-1+\varepsilon}^{x-\delta} S_n(x,u)\,du.$$

$\left|\int_{-1}^{-1+\varepsilon} S_n(x,u)\,du\right|$ kann gemäß Ziffer 26 unabhängig von der Lage des Punktes x in I_0 durch bloße Wahl von ε beliebig klein gemacht werden, $\int_{-1+\varepsilon}^{x-\delta} S_n(x,u)\,du$ konvergiert gemäß (27·5) nach Wahl von δ, ε und η gleichmäßig für alle x in I_0 gegen 0 mit $n\to+\infty$. Man kann also gemäß (2) und (3) dadurch, daß man η, ε, δ, n hintereinander geeignet wählt, unabhängig von der Lage des Punktes x in I_0 erreichen, daß sich $\int_{x-\delta}^{x} S_n(x,u)\,du$ von $\frac{1}{2}$ beliebig wenig unterscheidet, oder anders gesprochen: es ist gleichmäßig für alle x in I_0

$$(4)\qquad \lim_{n\to+\infty}\int_{x-\delta}^{x} S_n(x,u)\,du = \frac{1}{2}.$$

Nun betrachten wir das zweite Integral der rechten Seite von (1). Es ist gemäß den Voraussetzungen über die Größe des Intervalls $\bar{I}_x (x-\delta \leqq u < x)$ in Ziffer 27 nach dem zweiten Mittelwertsatz

$$(5)\qquad \int_{x-\delta}^{x} S_n(x,u)\,[f(u)-\lim_{h\to 0} f(x-h)]\,du$$

$$= [f(x-\delta)-\lim_{h\to 0} f(x-h)]\int_{x-\delta}^{\zeta} S_n(x,u)\,du,$$

wobei $x-\delta \leqq \zeta \leqq x$ ist. Wegen der Stetigkeit von $f(u)$ in $\bar{I}_x$ können wir δ so klein wählen, daß $|f(x-\delta)-\lim_{h\to 0} f(x-h)|$ beliebig klein wird. Dabei hängt δ von der Lage des Punktes x in I_0 nicht ab, weil die Funktion $f(x)$ als stetige Funktion im abgeschlossenen Intervall I_0 auch gleichmäßig stetig ist. Wenn wir also noch beweisen können, daß $\int_{x-\delta}^{\zeta} S_n(x,u)\,du$ wenigstens für alle genügend großen n unabhängig von n und δ und,

falls x in I_0 variiert, auch unabhängig von x beschränkt bleibt, so kann der Betrag von (5) durch Wahl von δ unabhängig von den genannten Werten von n und x beliebig klein gemacht werden, und es konvergiert infolgedessen (1) zufolge (4) mit $n \to +\infty$ gleichmäßig für alle x in I_0 gegen $\frac{1}{2} \lim\limits_{h \to 0} f(x-h)$.

Der erwähnte Beweis läßt sich in folgender Weise führen: Wir denken uns n schon so groß gewählt, daß $\frac{1}{n} < \delta$ ist, und setzen zuerst voraus, daß $\zeta > x - \frac{1}{n}$ ist. Es ist

$$\int\limits_{x-\delta}^{\zeta} S_n(x, u)\, du = \int\limits_{x-\delta}^{x-\frac{1}{n}} S_n(x, u)\, du + \int\limits_{x-\frac{1}{n}}^{\zeta} S_n(x, u)\, du. \tag{6}$$

Wie in Ziffer 27 erhalten wir

$$\int\limits_{x-\delta}^{x-\frac{1}{n}} S_n(x, u)\, du = \frac{n+1}{2}\Bigg[\frac{P_{n+1}(x)}{\delta}\int\limits_{x-\delta}^{\xi_1'} P_n(u)\, du + n P_{n+1}(x) \int\limits_{\xi_1'}^{x-\frac{1}{n}} P_n(u)\, du$$
$$- \frac{P_n(x)}{\delta}\int\limits_{x-\delta}^{\xi_2'} P_{n+1}(u)\, du - n P_n(x) \int\limits_{\xi_2'}^{x-\frac{1}{n}} P_{n+1}(u)\, du\Bigg], \tag{7}$$

wobei ξ_1' und ξ_2' zwischen $x-\delta$ und $x - \frac{1}{n}$ liegen, die Grenzen eingeschlossen. Wegen $\frac{1}{\delta} < n$, (27·4) und (27·1) ist z. B. für alle hinreichend großen n

$$\left|\frac{n+1}{2}\,\frac{P_{n+1}(x)}{\delta}\int\limits_{x-\delta}^{\xi_1'} P_n(u)\, du\right| < \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}\,|P_{n+1}(x)|\,|P_{n+1}(\xi_1') \tag{8}$$
$$- P_{n+1}(x-\delta) - P_{n-1}(\xi_1') + P_{n-1}(x-\delta)| < G_1,$$

wobei G_1 nur von ε und η, aber nicht von δ, n und der Lage des Punktes x in I_0 abhängt. Ähnliches gilt von den drei übrigen Integralen der rechten Seite von (7), daher auch von der linken Seite.

Nun schätzen wir $\int\limits_{x-\frac{1}{n}}^{\zeta} S_n(x, u)\, du$ ab und wenden dazu auf (25·5) den Mittelwertsatz der Differentialrechnung an. Es ist

$$\frac{P_{n+1}(x)\, P_n(u) - P\;\,(x)\, P_{n+1}(u)}{x-u} = - P_{n+1}(x)\,\frac{P_n(u) - P_n(x)}{u-x}$$
$$+ P_n(x)\,\frac{P_{n+1}(u) - P_{n+1}(x)}{u-x}$$
$$= P_n(x)\, P'_{n+1}\,[x + \vartheta_1(u-x)] - P_{n+1}(x)\, P'_n\,[x + \vartheta_2(u-x)],$$

wobei ϑ_1 und ϑ_2 zwischen 0 und 1 liegen und im übrigen noch von n, u und x abhängen. Nach dem ersten Mittelwertsatz der Integralrechnung ist daher

$$\int_{x-\frac{1}{n}}^{\zeta} S_n(x,u)\,du = \frac{n+1}{2}\left\{P_n(x)\int_{x-\frac{1}{n}}^{\zeta} P'_{n+1}[x+\vartheta_1(u-x)]\,du - P_{n+1}(x)\int_{x-\frac{1}{n}}^{\zeta} P'_n[x+\vartheta_2(u-x)]\,du\right\}$$

$$= \frac{n+1}{2}\left(\zeta - x + \frac{1}{n}\right)\{P_n(x)P'_{n+1}[x+\vartheta_1(\zeta_1-x)] - P_{n+1}(x)P'_n[x+\vartheta_2(\zeta_2-x)]\},$$

wobei ζ_1 und ζ_2 zwischen $x-\frac{1}{n}$ und ζ liegen und auch in ϑ_1 und ϑ_2 für u einzusetzen sind, nämlich ζ_1 in ϑ_1 und ζ_2 in ϑ_2. Nun ist $\left|\zeta - x + \frac{1}{n}\right| < \frac{2}{n}$ wegen $\zeta > x - \frac{1}{n}$, daher nach (24·3) und (24·4) für alle genügend großen n

$$\left|\int_{x-\frac{1}{n}}^{\zeta} S_n(x,u)\,du\right| < G_2, \tag{9}$$

wobei für G_2 das gleiche gilt wie für G_1. Gemäß (6), (7), (8) und (9) ist infolgedessen für alle genügend großen n und $x-\delta < x-\frac{1}{n} < \zeta \leqq x$

$$\left|\int_{x-\delta}^{\zeta} S_n(x,u)\,du\right| < G, \tag{10}$$

wobei für G das gleiche gilt wie für G_1 und G_2.

Nun haben wir noch den Fall $\zeta \leqq x - \frac{1}{n}$ zu erledigen. Es ergibt sich ähnlich wie bei Formel (7)

$$\int_{x-\delta}^{\zeta} S_n(x,u)\,du = \frac{n+1}{2}\left[\frac{P_{n+1}(x)}{\delta}\int_{x-\delta}^{\zeta_1'} P_n(u)\,du + \frac{P_{n+1}(x)}{x-\zeta}\int_{\zeta_1'}^{\zeta} P_n(u)\,du - \frac{P_n(x)}{\delta}\int_{x-\delta}^{\zeta_2'} P_{n+1}(u)\,du - \frac{P_n(x)}{x-\zeta}\int_{\zeta_2'}^{\zeta} P_{n+1}(u)\,du\right]. \tag{11}$$

Wegen $\frac{1}{\delta} < n$, (27·4) und (27·1) ist z. B. für alle hinreichend großen n

$$\left|\frac{n+1}{2}\,\frac{P_{n+1}(x)}{\delta}\int_{x-\delta}^{\zeta_1'} P_n(u)\,du\right| < \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}\,|P_{n+1}(x)|\,|P_{n+1}(\zeta_1') - P_{n+1}(x-\delta) - P_{n-1}(\zeta_1') + P_{n-1}(x-\delta)| < G', \tag{12}$$

wobei für G' das gleiche gilt wie für G. Eine ähnliche Abschätzung erhält man aber auch für die drei übrigen Integrale der rechten Seite von (11), da $x - \zeta \geqq \frac{1}{n}$ ist, somit auch für die linke Seite. Damit ist die Beschränktheit von $\int\limits_{x-\delta}^{\zeta} S_n(x, u)\, du$ in allen Fällen nachgewiesen.

Jetzt beweist man ebenso, daß $\int\limits_{x}^{x+\delta} S_n(x, u) f(u)\, du$ mit $n \to +\infty$ gleichmäßig für alle x in I_0 gegen $\frac{1}{2} \lim\limits_{h \to 0} f(x+h)$ konvergiert.

30. Konvergenz der Entwicklung. Berücksichtigen wir nun die Ergebnisse, die in den Ziffern 25—29 zusammengefaßt sind, so folgt

$$(1) \qquad \lim_{n \to +\infty} s_n(x) = \frac{1}{2}[\lim_{h \to 0} f(x+h) + \lim_{h \to 0} f(x-h)] \qquad (h > 0),$$

ferner, weil $\lim\limits_{h \to 0} f(x+h) = \lim\limits_{h \to 0} f(x-h) = f(x)$ wegen der Stetigkeit von $f(x)$ in I_0 ist,

$$(2) \qquad \lim_{n \to +\infty} s_n(x) = f(x)$$

gleichmäßig für alle x in I_0. Oder in Worten: Die Entwicklung (25·1) der Funktion $f(x)$ nach LEGENDREschen Polynomen konvergiert in jedem Punkte des Intervalls $-1 < x < +1$, in dessen Umgebung die Funktion beschränkt ist, gegen das arithmetische Mittel des links- und rechtsseitigen Grenzwertes der Funktion, in jedem Stetigkeitspunkt somit gegen den Funktionswert, und zwar gleichmäßig in jedem abgeschlossenen Intervall, in dem die Funktion stetig ist und das im Intervall $-1 < x < +1$ liegt.

Das Verhalten der Reihe (1) in den Endpunkten ± 1 von I und an den Stellen, in deren Umgebung die Funktion nicht beschränkt ist, wollen wir nicht untersuchen, ebensowenig die Frage, inwieweit die Funktion durch die Koeffizienten (25·2) bestimmt ist. Näheres findet der Leser in dem in Fußnote 2) genannten Buch von HOBSON. Wir haben bei den Überlegungen der Ziffern 25—30 Gedankengänge von H. BURKHARDT[1]) und E. W. HOBSON[2]) benützt.

31. Entwicklung von ξ^n nach Legendreschen Polynomen. Wenn wir die Gleichungen (13·1) nach den einzelnen Potenzen von ξ auflösen, er-

---

[1]) Siehe Fußnote in Ziffer 24.

[2]) Siehe Fußnote in Ziffer 18.

halten wir

$$(1)\quad \begin{cases} 1 = P_0(\xi), \\ \xi = P_1(\xi), \\ \xi^2 = \frac{2}{3} P_2(\xi) + \frac{1}{3} P_0(\xi), \\ \xi^3 = \frac{2}{5} P_3(\xi) + \frac{3}{5} P_1(\xi), \\ \xi^4 = \frac{8}{35} P_4(\xi) + \frac{4}{7} P_2(\xi) + \frac{1}{5} P_0(\xi), \quad \text{usw.,} \\ \text{allgemein} \\ \xi^n = a_n P_n(\xi) + a_{n-2} P_{n-2}(\xi) + \cdots \end{cases}$$

Aus der letzten Gleichung (1) folgt gemäß (21·1)

$$(2)\qquad \int_{-1}^{+1} \xi^m P_n(\xi)\, d\xi = 0 \quad \text{für} \quad m = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Von diesem Satz läßt sich folgende Umkehrung beweisen: Das einzige Polynom $f(\xi)$ vom n-ten Grad in ξ, welches der Bedingung

$$(3)\qquad \int_{-1}^{+1} \xi^m f(\xi)\, d\xi = 0 \quad \text{für} \quad m = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

genügt, ist $C P_n(\xi)$, wobei C eine beliebige Konstante bedeutet. Zum Beweise bedenken wir, daß aus (3) und (1) der Reihe nach

$$(4)\qquad \int_{-1}^{+1} P_m(\xi) f(\xi)\, d\xi = 0 \quad \text{für} \quad m = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

folgt. Das einzige Polynom n-ten Grades aber, das die Gleichungen (4) befriedigt, ist $P_n(\xi)$ bis auf einen konstanten Faktor gemäß den Überlegungen von Ziffer 22.

Da $P_n(\xi) = \alpha\, \xi^n + \beta\, \xi^{n-2} + \gamma\, \xi^{n-4} + \cdots$ ist, ergibt sich für alle positiven ganzzahligen m

$$\int_0^1 \xi^m P_n(\xi)\, d\xi = \frac{\alpha}{m+n+1} + \frac{\beta}{m+n-1} + \frac{\gamma}{m+n-3} + \cdots$$
$$= \frac{g(m, n)}{(m+n+1)(m+n-1)(m+n-3)\cdots},$$

wobei $g(m, n)$ als Funktion von m betrachtet, ein Polynom $\left[\frac{n}{2}\right]$-ten Grades in m ist. Der Koeffizient der höchsten Potenz von m ist

$$\alpha + \beta + \gamma + \cdots = P_n(1) = 1 \quad \text{nach (10·3).}$$

Aus (2) folgern wir

$$\int_{-1}^{+1} \xi^m P_n(\xi)\, d\xi = 2 \int_0^1 \xi^m P_n(\xi)\, d\xi = 0$$

für $m = n-2,\ n-4,\ n-6, \ldots,$ weil die Exponenten von ξ im Integranden gerade Zahlen sind. $g(m, n)$ verschwindet also für die eben ge-

nannten Werte von m, infolgedessen ist

$$g(m,n) = \begin{cases} m(m-2)\cdots(m-n+2) & \text{für gerades } n > 0 \\ (m-1)(m-3)\cdots(m-n+2) & \text{für ungerades } n > 1 \end{cases}$$

und

$$\int_0^1 \xi^m P_n(\xi)\,d\xi = \begin{cases} \dfrac{m(m-2)\cdots(m-n+2)}{(m+n+1)(m+n-1)\cdots(m+1)} & \text{für gerades } n > 0 \\ \dfrac{(m-1)(m-3)\cdots(m-n+2)}{(m+n+1)(m+n-1)\cdots(m+2)} & \text{für ungerades } n > 1, \end{cases}$$

daher

$$(5) \qquad \int_0^1 \xi^m P_n(\xi)\,d\xi = \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+2)}{(m+n+1)(m+n-1)\cdots(m-n+3)}$$

für alle positiven ganzzahligen $n \geqq 2$ und $m \geqq n$.

Jetzt lassen sich die Koeffizienten der Entwicklung (1) leicht bestimmen. Nach (25·2) ist

$$a_r = \left(r + \frac{1}{2}\right) \int_{-1}^{+1} \xi^n P_r(\xi)\,d\xi,$$

also $a_r = 0$, wenn $r > n$ nach (2) oder wenn $n - r$ ungerade ist, weil in diesem Fall die Exponenten von ξ ungerade Zahlen sind. Dagegen ist für gerades $n - r$ nach (5)

$$a_r = (2r+1) \int_0^1 \xi^n P_r(\xi)\,d\xi = \frac{(2r+1)\,n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+2)}{(n+r+1)(n+r-1)\cdots(n-r+3)}$$

$$= \frac{(2r+1)\,n!}{(n+r+1)(n+r-1)\cdots(n-r+3)\,(n-r+1)!}$$

$$= \frac{n!\,(2r+1)}{3\cdot 5\cdots(n+r+1)\cdot 2\cdot 4\cdots(n-r)}.$$

Wie sich durch Rechnung leicht ergibt, gilt diese Formel auch für $r = 0$ und $r = 1$. Es ist also

$$(6) \qquad \xi^n = \frac{n!}{3\cdot 5\cdots(2n+1)} \Big[(2n+1)\,P_n(\xi) + (2n-3)\,\frac{2n+1}{2}\,P_{n-2}(\xi) + (2n-7)\,\frac{(2n+1)(2n-1)}{2\cdot 4}\,P_{n-4}(\xi) + \cdots\Big].$$

Diese Formel stammt von LEGENDRE[1]).

§ 5. Legendresche Funktionen zweiter Art.

32. Legendresche Funktionen zweiter Art. Das LEGENDREsche Polynom $P_n(\xi)$ genügt nach (9·1) der Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(1) \qquad (1-\xi^2)\,u'' - 2\xi u' + n(n+1)\,u = 0.$$

---

[1]) Siehe Fußnote in Ziffer 10.

Um die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (1) zu finden, setzen wir $u = P_n(\xi) w$ und erhalten aus (1) zur Bestimmung von w

$$(1-\xi^2)\,[P_n(\xi)\,w'' + 2\,P_n'(\xi)\,w'] - 2\xi\,P_n(\xi)\,w' = 0$$

oder

$$\frac{w''}{w'} + \frac{2\,P_n'(\xi)}{P_n(\xi)} - \frac{2\xi}{1-\xi^2} = 0,$$

daher

$$w' = \frac{B}{(1-\xi^2)\,[P_n(\xi)]^2},$$

somit

$$w = B \int \frac{d\xi}{(1-\xi^2)\,[P_n(\xi)]^2} + A$$

und

(2) $$u = P_n(\xi) \left\{ A + B \int \frac{d\xi}{(1-\xi^2)\,[P_n(\xi)]^2} \right\}.$$

Um das Integral zu berechnen, zerlegen wir den Integranden in Teilbrüche:

(3) $$\frac{1}{(1-\xi^2)\,[P_n(\xi)]^2} = \frac{a_0}{1-\xi} + \frac{b_0}{1+\xi} + \sum_{\nu=1}^{n} \left[\frac{a_\nu}{\xi-\alpha_\nu} + \frac{b_\nu}{(\xi-\alpha_\nu)^2} \right],$$

wobei die α_ν die Nullstellen von $P_n(\xi)$ bedeuten (Ziffer 17). Wenn wir Gleichung (3) mit $(1-\xi^2)\,[P_n(\xi)]^2$ multiplizieren und hernach $\xi = \pm 1$ setzen, finden wir $a_0 = 1/2$, $b_0 = 1/2$. Die a_ν müssen Null sein. Denn sonst erhielte man in u Glieder von der Gestalt $P_n(\xi) \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \ln(\xi - \alpha_\nu)$, d. h. die Stellen α_ν wären singulär, während sie gemäß der Differentialgleichung (1) regulär sind. Denn die einzigen im Endlichen gelegenen singulären Stellen der Differentialgleichung sind $\xi = \pm 1$, die Stellen α_ν somit reguläre Stellen der Differentialgleichung, also auch der Lösung. Wenn wir (3) integrieren und dabei $-1 < \xi < +1$ voraussetzen, erhalten wir demnach

$$\frac{1}{2} \ln \frac{1+\xi}{1-\xi} - \sum_{\nu=1}^{n} \frac{b_\nu}{\xi - \alpha_\nu},$$

somit wird

(4) $$u = A\,P_n(\xi) + B \left[\frac{1}{2} P_n(\xi) \ln \frac{1+\xi}{1-\xi} - P_n(\xi) \sum_{\nu=1}^{n} \frac{b_\nu}{\xi - \alpha_\nu} \right].$$

$P_n(\xi) \sum_{\nu=1}^{n} \frac{b_\nu}{\xi - \alpha_\nu}$ ist ein Polynom, dessen Grad $n-1$ nicht übersteigt und das wir mit $W_{n-1}(\xi)$ bezeichnen wollen. Für $n = 0$ gibt es gemäß (3) die Glieder mit b_ν nicht, das Polynom $W_{n-1}(\xi)$ ist also in diesem Fall nicht vor-

handen. Weil $\frac{W_{n-1}(\xi)}{P_n(\xi)} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{b_\nu}{\xi - \alpha_\nu}$ ist, erhält man

(5) $$b_\nu = \frac{W_{n-1}(\alpha_\nu)}{P'_n(\alpha_\nu)}.$$

Wir wollen nun die Beschränkung $-1 < \xi < +1$ fallen lassen und ξ als komplexe Veränderliche auffassen. $P_n(\xi)$ ist als Polynom in ξ, wie wir schon in Ziffer 10 gesehen haben, auch dann wohl definiert. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (I) können wir nun in der Gestalt

$$A P_n(\xi) + B\left[\frac{1}{2} P_n(\xi) \ln\frac{\xi+1}{\xi-1} - W_{n-1}(\xi)\right]$$

schreiben. Für den Klammerausdruck wollen wir nach MAGNUS und OBERHETTINGER[1]) die Bezeichnung

(6) $$\mathfrak{Q}_n(\xi) = \frac{1}{2} P_n(\xi) \ln\frac{\xi+1}{\xi-1} - W_{n-1}(\xi)$$

einführen. Für die Logarithmen sollen die Hauptwerte genommen werden, d. h. die Winkel von $\xi + 1$ und $\xi - 1$ sollen zwischen $-\pi$ und $+\pi$ liegen. $\mathfrak{Q}_n(\xi)$ ist also eindeutig, wenn wir die komplexe Zahlenebene längs der reellen Achse von $+1$ nach $-\infty$ aufschneiden.

Nähert sich ξ unbegrenzt einem Werte $\cos\vartheta$ zwischen -1 und $+1$, so wird der Winkel von $\xi + 1$ gleich 0, der von $\xi - 1$ gleich π, wenn sich ξ auf der oberen Halbebene der reellen Achse nähert, dagegen sind die Winkel 0 bzw. $-\pi$, wenn sich ξ auf der unteren Halbebene der reellen Achse nähert. Wir erhalten also mit $h > 0$

(7) $$\begin{cases} \lim\limits_{h\to 0} \mathfrak{Q}_n(\cos\vartheta + hi) = \frac{1}{2} P_n(\cos\vartheta)\left(\ln\frac{1+\cos\vartheta}{1-\cos\vartheta} - i\pi\right) - W_{n-1}(\cos\vartheta), \\ \lim\limits_{h\to 0} \mathfrak{Q}_n(\cos\vartheta - hi) = \frac{1}{2} P_n(\cos\vartheta)\left(\ln\frac{1+\cos\vartheta}{1-\cos\vartheta} + i\pi\right) - W_{n-1}(\cos\vartheta). \end{cases}$$

Für $-1 < \xi < +1$ wollen wir $Q_n(\xi)$ durch den reellen Teil von (6), d. h. durch die Gleichung

(8) $$Q_n(\xi) = \frac{1}{2} P_n(\xi) \ln\frac{1+\xi}{1-\xi} - W_{n-1}(\xi)$$

definieren.

Nähert sich ξ unbegrenzt einem Wert < -1, so werden die Winkel von $\xi + 1$ und $\xi - 1$ entweder beide $+\pi$ oder beide $-\pi$, je nachdem man sich auf der oberen oder unteren Halbebene der reellen Achse nähert; man erhält daher in beiden Fällen

$$\mathfrak{Q}_n(\xi) = \frac{1}{2} P_n(\xi) \ln\left|\frac{\xi+1}{\xi-1}\right| - W_{n-1}(\xi).$$

[1]) W. MAGNUS und F. OBERHETTINGER, Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik, 2. Aufl., Berlin 1948, Springer-Verlag (im folgenden mit M.-O. bezeichnet), S. 77.

$\mathfrak{Q}_n(\xi)$ ist also stetig, wenn wir die Strecke von -1 bis $+1$ ausschließen, somit eine eindeutige analytische Funktion in der längs dieser Strecke aufgeschnittenen komplexen Zahlenebene gemäß dem SCHWARZschen Spiegelungsprinzip, da die Grenzwerte für $\xi < -1$ reell sind. Überschreitet man diese Strecke von der oberen zur unteren Halbebene, so erleidet die Funktion den Sprung $i\pi P_n(\cos\vartheta)$. In den Punkten ± 1 hat $\mathfrak{Q}_n(\xi)$ logarithmische Singularitäten. Im Unendlichen ist $\mathfrak{Q}_n(\xi)$ regulär und hat dort eine $(n+1)$-fache Nullstelle. Denn gemäß (2), (3) und (4) ist

$$\frac{d}{d\xi}\left[\frac{\mathfrak{Q}_n(\xi)}{P_n(\xi)}\right] = \frac{1}{(1-\xi^2)\,[P_n(\xi)]^2}, \tag{9}$$

hat infolgedessen im Unendlichen eine $(2n+2)$-fache Nullstelle, woraus sich die Behauptung ergibt, da $P_n(\xi)$ im Unendlichen einen n-fachen Pol hat.

Nach (7) und (8) hat man

$$\lim_{h\to 0} \mathfrak{Q}_n(\cos\vartheta \pm hi) = Q_n(\cos\vartheta) \mp \frac{i\pi}{2} P_n(\cos\vartheta),$$

daher

$$\begin{aligned} Q_n(\cos\vartheta) &= \lim_{h\to 0} \mathfrak{Q}_n(\cos\vartheta \pm hi) \pm \frac{i\pi}{2} P_n(\cos\vartheta) \\ &= \frac{1}{2}\left[\lim_{h\to 0} \mathfrak{Q}_n(\cos\vartheta + hi) + \lim_{h\to 0} \mathfrak{Q}_n(\cos\vartheta - hi)\right]. \end{aligned} \tag{10}$$

$\mathfrak{Q}_n(\xi)$ nennt man LEGENDREsche Funktion zweiter Art im Gegensatz zu $P_n(\xi)$, das als Funktion erster Art bezeichnet wird.

33. Reihenentwicklung im Unendlichen. Wir wollen $\mathfrak{Q}_n(\xi)$ in eine Reihe nach fallenden Potenzen von ξ entwickeln. Diese Reihe muß gemäß der vorigen Ziffer mit der $-(n+1)$-ten Potenz von ξ beginnen und darf nach (32·9) nur gerade oder nur ungerade Potenzen von ξ enthalten. Wir setzen also $u = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu \xi^{\alpha-2\nu}$ in die Differentialgleichung (32·1) ein. Vergleichen wir die Koeffizienten von ξ^α, so ergibt sich

$$n(n+1) - 2\alpha - \alpha(\alpha-1) = 0$$

oder

$$\alpha = n \quad \text{und} \quad \alpha = -(n+1).$$

Für $\mathfrak{Q}_n(\xi)$ kommt nur der zweite Wert in Frage. Mit ihm liefert der Vergleich der Koeffizienten von $\xi^{\alpha-2\nu}$

$$(n+2\nu-1)(n+2\nu)\,c_{\nu-1} - (n+2\nu+1)(n+2\nu+2)\,c_\nu \\ + 2(n+2\nu+1)\,c_\nu + n(n+1)\,c_\nu = 0$$

oder
$$\frac{c_\nu}{c_{\nu-1}} = \frac{(n+2\nu-1)(n+2\nu)}{2\nu(2n+2\nu+1)},$$
somit

(1) $$\mathfrak{Q}_n(\xi) = c_0 \left[\frac{1}{\xi^{n+1}} + \frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)} \frac{1}{\xi^{n+3}} + \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2\cdot 4\cdot (2n+3)(2n+5)} \frac{1}{\xi^{n+5}} + \cdots\right].$$

Der Wert $\alpha = n$ liefert $u = P_n(\xi)$, wenn c_0 passend gewählt wird. Die betreffende Rechnung wurde in Ziffer 13 durchgeführt. Weil $\lim\limits_{\nu \to +\infty} \frac{c_\nu}{c_{\nu-1}} = 1$ ist, konvergiert die Reihe (1) für $|\xi| > 1$ (vgl. II, 9), daher als Potenzreihe in $\frac{1}{\xi}$ gleichmäßig für $|\xi| \geqq 1 + \delta$ bei beliebigem festem $\delta > 0$.

Um c_0 zu bestimmen, bedenken wir, daß
$$\frac{1}{2}\ln\frac{\xi+1}{\xi-1} = \frac{1}{2}\left[\ln\left(1+\frac{1}{\xi}\right) - \ln\left(1-\frac{1}{\xi}\right)\right] = \frac{1}{\xi} + \frac{1}{3\xi^3} + \frac{1}{5\xi^5} + \cdots$$
und nach (13·3)
$$P_n(\xi) = \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{n!}\left[\xi^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}\xi^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 4\cdot(2n-1)(2n-3)}\xi^{n-4} - \cdots\right]$$
ist. Wir setzen diese Reihenentwicklungen in (32·6) ein und vergleichen das Ergebnis mit (1). Man erhält eine Entwicklung nach fallenden Potenzen von ξ, beginnend mit ξ^{n-1}. Da die höchste Potenz von ξ, die in (1) auftritt, die $-(n+1)$-te ist, müssen in der Entwicklung die Koeffizienten von ξ^ν für $\nu = n-1, n-2, \ldots, -n$ verschwinden. Für $\nu = -1, -2, \ldots, -n$ ist das von selbst der Fall, für $\nu = 0, 1, \ldots, n-1$ kann man durch diese Bedingung die Koeffizienten von $W_{n-1}(\xi)$ bestimmen. Für $\nu = -(n+1)$ erhält man
$$c_0 = \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{n!}\left[\frac{1}{2n+1} - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}\frac{1}{2n-1} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 4\cdot(2n-1)(2n-3)}\frac{1}{2n-3} - \cdots\right].$$
Dieser Ausdruck ist nach der eben benützten Formel für $P_n(\xi)$ nichts anderes als $\int\limits_0^1 \xi^n P_n(\xi)\,d\xi$. Somit wird $c_0 = \frac{n!}{1\cdot 3\cdots(2n+1)}$, wenn man noch (31·5) heranzieht. Es ergibt sich also schließlich die für $|\xi| \geqq 1+\delta$ gleichmäßig konvergente Reihe

(2) $$\mathfrak{Q}_n(\xi) = \frac{n!}{1\cdot 3\cdots(2n+1)}\left[\frac{1}{\xi^{n+1}} + \frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)}\frac{1}{\xi^{n+3}} + \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2\cdot 4\cdot(2n+3)(2n+5)}\frac{1}{\xi^{n+5}} + \cdots\right].$$

34. Integraldarstellungen von Schläfli und Heine. Nach (14·2) ergibt sich für ganzzahliges $m \geqq 0$ und $n \geqq 2$

$$\int_0^1 x^{n+m} P_n(x)\,dx = \frac{1}{2^n\, n!}\int_0^1 x^{n+m} \frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n}\,dx$$

$$= -\frac{(n+m)}{2^n\, n!}\int_0^1 x^{n+m-1} \frac{d^{n-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-1}}\,dx = \cdots$$

$$= \frac{(n+m)(n+m-1)\cdots(m+1)}{2^n\, n!}\int_0^1 x^m (1-x^2)^n\,dx.$$

Wir können diese Formel benützen, um $\int_0^1 x^m(1-x^2)^n\,dx$ zu berechnen, da uns $\int_0^1 x^{n+m} P_n(x)\,dx$ aus (31·5) bekannt ist. Wir erhalten

$$\int_0^1 x^m (1-x^2)^n\,dx = \frac{2^n n!}{(2n+m+1)(2n+m-1)\cdots(m+1)}.$$

Wie sich durch Rechnung ergibt, gilt diese Formel auch für $n = 0$ und $n = 1$.

(33·2) liefert uns mit dieser Formel

$$\mathfrak{Q}_n(x) = \frac{1}{2^n x^{n+1}}\left\{\int_0^1 (1-t^2)^n dt + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+2\nu)}{(2\nu)!\, x^{2\nu}} \int_0^1 (1-t^2)^n t^{2\nu}\, dt\right\}.$$

Es ist, da der Integrand eine gerade bzw. ungerade Funktion ist,

$$\int_{-1}^{+1} (1-t^2)^n t^{2\nu}\, dt = 2\int_0^1 (1-t^2)^n t^{2\nu}\, dt$$

und

$$\int_{-1}^{+1} (1-t^2)^n t^{2\nu+1}\, dt = 0,$$

daher

$$\mathfrak{Q}_n(x) = \frac{1}{2^{n+1} x^{n+1}} \int_{-1}^{+1} (1-t^2)^n \left\{1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+\nu)}{\nu!}\left(\frac{t}{x}\right)^{\nu}\right\} dt,$$

weil die Reihe für $|x| \geqq 1+\delta$ $(\delta > 0)$ und $-1 \leqq t \leqq +1$ gleichmäßig konvergiert. Es ist ja

$$\left(1-\frac{t}{x}\right)^{-(n+1)} = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+\nu)}{\nu!}\left(\frac{t}{x}\right)^{\nu}.$$

Somit ergibt sich schließlich

(1) $$\mathfrak{Q}_n(x) = \frac{1}{2^{n+1}} \int_{-1}^{+1} (1-t^2)^n (x-t)^{-n-1} dt.$$

Diese Formel stammt von L. SCHLÄFLI[1]). Sie ist zunächst für $|x| \geqq 1+\delta$ bewiesen; da aber beide Seiten der Gleichung außerhalb der Strecke zwischen den Punkten -1 und $+1$ analytische Funktionen von x sind, gilt sie überall außer für $-1 \leqq x \leqq +1$.

Wir führen nun die neue Veränderliche u durch die Gleichung

$$e^u = \frac{1+t}{1-t}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$

ein und setzen $x > 1$ oder $x < -1$ voraus. Es ist hiernach

$$\mathfrak{Cof}\, u = \frac{x(1+t^2)-2t}{(1-t^2)\sqrt{x^2-1}},$$

$$x + \sqrt{x^2-1}\,\mathfrak{Cof}\, u = \frac{2(x-t)}{1-t^2},$$

ferner

$$e^u \frac{du}{dt} = \frac{2}{(1-t)^2}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = \frac{2e^u}{1-t^2},$$

$$\text{also } \frac{dt}{du} = \frac{1}{2}(1-t^2),$$

somit

(2) $$\mathfrak{Q}_n(x) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \left(x + \sqrt{x^2-1}\,\mathfrak{Cof}\, u\right)^{-n-1} du$$

$$= \int_0^{\infty} \left(x + \sqrt{x^2-1}\,\mathfrak{Cof}\, u\right)^{-n-1} du,$$

eine Formel, die auf HEINE[2]) zurückgeht.

35. Zusammenhang zwischen den Legendreschen Funktionen erster und zweiter Art. Für $-1 \leqq x \leqq +1$ und $|y| \geqq 1+\delta\ (\delta > 0)$ gilt die gleichmäßig konvergente Entwicklung

$$\frac{1}{y-x} = \frac{1}{y\left(1-\frac{x}{y}\right)} = \frac{1}{y} + \frac{x}{y^2} + \frac{x^2}{y^3} + \cdots$$

---

[1]) L. SCHLÄFLI, Über die zwei Heineschen Kugelfunktionen mit beliebigem Parameter und ihre ausnahmslose Darstellung durch bestimmte Integrale, Universitätsfestschrift, Bern 1881.

[2]) E. HEINE, J. reine angew. Math. 42 (1851) 73, 75.

Daraus erhalten wir mit Hilfe von Formel (31·6)

$$\frac{1}{y-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}\,\frac{1}{y^{n+1}}\Big[(2n+1)P_n(x) + (2n-3)\frac{2n+1}{2}P_{n-2}(x)+(2n-7)\frac{(2n+1)(2n-1)}{2\cdot 4}P_{n-4}(x)+\cdots\Big].$$

Die Reihe konvergiert im gleichen Bereich $-1\leqq x\leqq+1$, $|y|>1$ auch, wenn man überall y und die $P_\nu(x)$ durch ihre absoluten Beträge ersetzt. Für $|x|\leqq 1$ ist nämlich nach (11·2) immer $|P_\nu(x)|\leqq 1$, während $P_\nu(1)=1$ ist; da nun die ursprüngliche Reihe für $x=1$ und $y>1$ mit lauter positiven Gliedern konvergiert, so konvergiert die durch Einführung der absoluten Beträge von $P_\nu(x)$ und von y daraus gewonnene Reihe um so mehr, und zwar gleichmäßig für $-1\leqq x\leqq+1$ und $|y|\geqq 1+\delta$. Wir können also die Reihe nach den $P_\nu(x)$ umordnen und erhalten

(1)
$$\frac{1}{y-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!\,(2n+1)\,P_n(x)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}\Big[\frac{1}{y^{n+1}}+\frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)}\,\frac{1}{y^{n+3}} + \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2\cdot 4\cdot(2n+3)(2n+5)}\,\frac{1}{y^{n+5}}+\cdots\Big] = \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)P_n(x)\,\mathfrak{Q}_n(y)$$

nach (33·2). Die Entwicklung (1) stammt von HEINE[1]). Sie konvergiert gleichmäßig für $-1\leqq x\leqq+1$ und $|y|\geqq 1+\delta$. Multiplizieren wir also mit $P_n(x)$ und integrieren von -1 bis $+1$, so liefert uns die Orthogonalitätseigenschaft (21·1) die Formel von F. NEUMANN[2])

(2)
$$\mathfrak{Q}_n(y)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\frac{P_n(x)}{y-x}\,dx.$$

Sie wurde für $|y|>1$ hergeleitet, gilt aber durch analytische Fortsetzung, solange beide Seiten analytische Funktionen von y sind und auf gleichen Wegen fortgesetzt werden.

36. Rekursionsformeln. Dividieren wir die in x statt ξ geschriebene Rekursionsformel (12·1) durch $2(y-x)$ und integrieren hierauf nach x zwischen -1 und $+1$, so folgt dieselbe Rekursionsformel für $\mathfrak{Q}_n(y)$. Denn nach (21·1) mit $m=0$ und $n>0$ und (35·2) ist

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\frac{x\,P_n(x)}{y-x}\,dx=-\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}P_n(x)\,dx+\frac{y}{2}\int_{-1}^{+1}\frac{P_n(x)}{y-x}\,dx=y\,\mathfrak{Q}_n(y).$$

[1]) E. HEINE, J. reine angew. Math. 42 (1851) 72.

[2]) F. NEUMANN, J. reine angew. Math. 37 (1848) 21.

Wir haben somit

$$(1)\qquad (n+1)\,\mathfrak{Q}_{n+1}(y) - (2n+1)\,y\,\mathfrak{Q}_n(y) + n\,\mathfrak{Q}_{n-1}(y) = 0.$$

Ferner ist mit Hilfe von (35·2), (10·3) und (10·4)

$$\mathfrak{Q}'_n(y) = -\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{+1}\frac{P_n(x)}{(y-x)^2}\,dx = \left[-\frac{P_n(x)}{2\,(y-x)}\right]_{-1}^{+1} + \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{+1}\frac{P'_n(x)}{y-x}\,dx$$

$$= -\frac{1}{2\,(y-1)} + \frac{(-1)^n}{2\,(y+1)} + \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{+1}\frac{P'_n(x)}{y-x}\,dx,$$

somit für $n > 0$ nach (12·2), (35·2), (10·3) und (10·4)

$$\mathfrak{Q}'_{n+1}(y) + \mathfrak{Q}'_{n-1}(y) - 2\,y\,\mathfrak{Q}'_n(y)$$

$$= 1 + (-1)^{n+1} + \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{+1}\frac{P'_{n+1}(x) + P'_{n-1}(x) - 2\,y\,P'_n(x)}{y-x}\,dx$$

$$= 1 + (-1)^{n+1} + \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{+1}\frac{P'_{n+1}(x) + P'_{n-1}(x) - 2\,x\,P'_n(x)}{y-x}\,dx - \int\limits_{-1}^{+1}P'_n(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{+1}\frac{P_n(x)}{y-x}\,dx = \mathfrak{Q}_n(y).$$

Die Formel (12·2) gilt also auch für die Funktion $\mathfrak{Q}_n(\xi)$. Da sich aber die übrigen Rekursionsformeln (4) bis (7) von Ziffer 12 aus den Formeln (1) und (2) der Ziffer 12 herleiten lassen und diese beiden Formeln für die Funktion $\mathfrak{Q}_n(\xi)$ erfüllt sind, sehen wir, daß die Rekursionsformeln von Ziffer 12 für die Legendreschen Funktionen erster und zweiter Art gelten, und zwar nach den Regeln der analytischen Fortsetzung für den gesamten Bereich, in dem die auftretenden Funktionen analytisch sind und auf gleichen Wegen fortgesetzt werden. Nur die Bemerkung am Schluß von Ziffer 12 über die Gültigkeit der Formeln für $n = 0$ ist für die Funktionen zweiter Art nicht mehr richtig.

37. Bestimmung des Polynomrestes W_{n-1}. Wie wir in Ziffer 11 gesehen haben, konvergiert die Reihe $(1 - 2\alpha\,\xi + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} P_n(\xi)\,\alpha^n$ gleichmäßig für $|\alpha| \leqq q < 1$ und $-1 \leqq \xi \leqq +1$. Wir haben daher unter

diesen Bedingungen für $\eta > 1$ nach (35·2)

$$(1)\qquad \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \frac{d\xi}{(\eta-\xi)\sqrt{1-2\alpha\xi+\alpha^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{Q}_n(\eta)\,\alpha^n.$$

Im Integral führen wir die neue Veränderliche $u = \sqrt{\frac{1-2\alpha\xi+\alpha^2}{\eta-\xi}}$ ein. Es sei α positiv und $1 < \eta < \frac{1+\alpha^2}{2\alpha}$. Dann ist

$$\xi = \frac{1+\alpha^2-\eta u^2}{2\alpha-u^2},\quad \eta-\xi = \frac{1-2\alpha\eta+\alpha^2}{u^2-2\alpha},\quad \frac{d\xi}{du} = \frac{2u\,(1-2\alpha\eta+\alpha^2)}{(u^2-2\alpha)^2},$$

somit

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \frac{d\xi}{(\eta-\xi)\sqrt{1-2\alpha\xi+\alpha^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-2\alpha\eta+\alpha^2}} \int_{\frac{1+\alpha}{\sqrt{\eta+1}}}^{\frac{1-\alpha}{\sqrt{\eta-1}}} \frac{du}{\sqrt{u^2-2\alpha}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-2\alpha\eta+\alpha^2}}\Big[\ln\Big(u+\sqrt{u^2-2\alpha}\Big)\Big]_{\frac{1+\alpha}{\sqrt{\eta+1}}}^{\frac{1-\alpha}{\sqrt{\eta-1}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-2\alpha\eta+\alpha^2}} \ln \frac{(1-\alpha+\sqrt{1-2\alpha\eta+\alpha^2})\sqrt{\eta+1}}{(1+\alpha+\sqrt{1-2\alpha\eta+\alpha^2})\sqrt{\eta-1}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-2\alpha\eta+\alpha^2}} \ln \frac{\eta-\alpha+\sqrt{1-2\alpha\eta+\alpha^2}}{\sqrt{\eta^2-1}}.$$

$\mathfrak{Q}_n(\eta)$ ist der Koeffizient von α^n in der Entwicklung dieses Ausdruckes nach Potenzen von α. Liegt η zwischen -1 und $+1$, so haben wir $\sqrt{\eta^2-1}$ gemäß Ziffer 32 durch $\sqrt{1-\eta^2}$ zu ersetzen. Denn der gemäß (32·8) zu bildende reelle Teil des Koeffizienten von α^n ist gleich dem Koeffizienten des reellen Teiles der Entwicklung (1) (α ist ja reell vorausgesetzt). Der Bruch im letzten Logarithmus ist auch dann wieder positiv, ebenso wie $1-2\alpha\eta+\alpha^2$. Führen wir dann noch $\alpha = \frac{r'}{r}$, $\eta = \frac{z}{r}$, $r^2 = x^2+y^2+z^2$ ein, so ist $Q_n(\eta)$ der Koeffizient von $\frac{r'^n}{r^{n+1}}$ in der Entwicklung von

$$f = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-r')^2}} \ln \frac{z-r'+\sqrt{x^2+y^2+(z-r')^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

nach Potenzen von r', somit

$$Q_n(\eta) = \frac{r^{n+1}}{n!}\left(\frac{\partial^n f}{\partial r'^n}\right)_{r'=0}$$
$$= \frac{(-1)^n}{n!} r^{n+1} \frac{\partial^n}{\partial z^n}\left(\frac{1}{r}\ln\frac{z+r}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$
$$= \frac{(-1)^n}{n!} r^{n+1} \frac{\partial^n}{\partial z^n}\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{1}{2}\ln\frac{r+z}{r-z}\right)$$
$$= \frac{(-1)^n}{n!} r^{n+1}\left[\frac{1}{2}\ln\frac{r+z}{r-z}\frac{\partial^n \frac{1}{r}}{\partial z^n} + n\frac{1}{r}\frac{\partial^{n-1}\frac{1}{r}}{\partial z^{n-1}} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\frac{\partial^{n-2}\frac{1}{r}}{\partial z^{n-2}} + \cdots\right]$$
$$= \frac{1}{2}P_n(\eta)\ln\frac{1+\eta}{1-\eta} - \left[P_0(\eta)P_{n-1}(\eta) + \frac{1}{2}P_1(\eta)P_{n-2}(\eta) + \frac{1}{3}P_2(\eta)P_{n-3}(\eta) + \cdots + \frac{1}{n}P_{n-1}(\eta)P_0(\eta)\right]$$

gemäß (9·2), also zufolge (32·8)

(2) $$W_{n-1}(\xi) = \sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\nu}P_{\nu-1}(\xi)P_{n-\nu}(\xi).$$

Diese Formel gilt natürlich als Gleichung zwischen Polynomen für jeden Wert von ξ. Sie stammt von L. SCHLÄFLI[1]).

38. Asymptotische Abschätzung der Legendreschen Funktionen zweiter Art. Wir führen in die Differentialgleichung (32·1) die neue Veränderliche $z = \left(\xi - \sqrt{\xi^2-1}\right)^2$ ein und denken uns dabei $\xi > 1$. Es ist also $0 < z < 1$. Wir erhalten

$$\frac{dz}{d\xi} = 2\left(\xi - \sqrt{\xi^2-1}\right)\left(1 - \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2-1}}\right) = -\frac{2z}{\sqrt{\xi^2-1}},$$
$$\sqrt{z} = \xi - \sqrt{\xi^2-1}, \qquad \frac{1}{\sqrt{z}} = \xi + \sqrt{\xi^2-1},$$
$$\xi = \frac{1}{2}\left(\sqrt{z} + \frac{1}{\sqrt{z}}\right), \qquad \xi^2 - 1 = \frac{(z-1)^2}{4z},$$
$$(1-\xi^2)\frac{du}{d\xi} = 2z\sqrt{\xi^2-1}\frac{du}{dz} = (1-z)\sqrt{z}\frac{du}{dz},$$
$$\frac{d}{d\xi}\left[(1-\xi^2)\frac{du}{d\xi}\right] = \frac{d}{dz}\left[(1-z)\sqrt{z}\frac{du}{dz}\right]\cdot\frac{4z^{\frac{3}{2}}}{z-1}.$$

---

[1]) Siehe Fußnote in Ziffer 34.

Aus (34·1) wird somit

$$\frac{d}{dz}\left[(1-z)\sqrt{z}\,\frac{du}{dz}\right]+\frac{1}{4}n(n+1)(z-1)z^{-\frac{3}{2}}u=0,$$

$$(1-z)\sqrt{z}\,\frac{d^2u}{dz^2}+\left(\frac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}}-\frac{3}{2}z^{\frac{1}{2}}\right)\frac{du}{dz}+\frac{1}{4}n(n+1)(z-1)z^{-\frac{3}{2}}u=0,$$

(1) $$z^2(1-z)\frac{d^2u}{dz^2}+\frac{1}{2}z(1-3z)\frac{du}{dz}-\frac{1}{4}n(n+1)(1-z)u=0.$$

Wir setzen an $u=\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu\, z^{\alpha+\nu}$ und erhalten durch Vergleich der Glieder mit z^α

$$\alpha(\alpha-1)+\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{4}n(n+1)=0$$

oder

$$\alpha=\frac{n+1}{2} \quad \text{und} \quad \alpha=-\frac{n}{2}.$$

Das Glied $z^{\alpha+\nu}$ gibt

$$\left[(\alpha+\nu)(\alpha+\nu-1)+\frac{1}{2}(\alpha+\nu)-\frac{1}{4}n(n+1)\right]c_\nu$$
$$=\left[(\alpha+\nu-1)(\alpha+\nu-2)+\frac{3}{2}(\alpha+\nu-1)-\frac{1}{4}n(n+1)\right]c_{\nu-1}$$

oder

(2) $$\frac{c_\nu}{c_{\nu-1}}=\frac{(2\nu-1)(n+\nu)}{\nu(2n+1+2\nu)} \quad \text{für} \quad \alpha=\frac{n+1}{2}$$

und

(3) $$\frac{c_\nu}{c_{\nu-1}}=\frac{(2\nu-1)(n+1-\nu)}{\nu(2n+1-2\nu)} \quad \text{für} \quad \alpha=-\frac{n}{2}.$$

Im ersten Fall konvergiert die entsprechende Reihe, weil $\lim\limits_{\nu\to+\infty}\frac{c}{c_{\nu-1}}=1$ und $0<z<1$ ist (vgl. II, 9), im zweiten Fall bricht die Reihe mit dem Glied $\nu=n$, d. h. mit $z^{\frac{n}{2}}$ ab. Für genügend große ξ ergibt sich

$$\sqrt{z}=\frac{1}{\xi+\sqrt{\xi^2-1}}=\frac{1}{2\xi}+\frac{1}{8\xi^2}+\cdots,$$

daher für die entsprechende Lösung der Differentialgleichung (1) im ersten Fall

(4) $$u_1=c_0 z^{\frac{n+1}{2}}+c_1 z^{\frac{n+3}{2}}+\cdots=\frac{c_0}{2^{n+1}\xi^{n+1}}+\frac{1}{\xi^{n+3}}(\cdots)$$

und im zweiten Fall

(5) $$u_2=c_0 z^{-\frac{n}{2}}+c_1 z^{-\frac{n}{2}+1}+\cdots+c_n z^{\frac{n}{2}}.$$

Als Lösung der Differentialgleichung (32·1) ist u_1 von der Gestalt

$$A P_n(\xi) + B \mathfrak{Q}_n(\xi).$$

Da aber $P_n(\xi)$ im Unendlichen einen n-fachen Pol und $\mathfrak{Q}_n(\xi)$ gemäß Ziffer 32 eine $(n+1)$-fache Nullstelle hat, muß $A = 0$ sein, weil auch u_1 als Funktion von ξ, wie aus (4) hervorgeht, im Unendlichen eine $(n+1)$-fache Nullstelle hat. Wählen wir $c_0 = \frac{2^{n+1}\, n!}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}$, so erhalten wir $u_1 = \mathfrak{Q}_n(\xi)$ gemäß Ziffer 33. Für die Koeffizienten c_ν der Reihenentwicklung von $\mathfrak{Q}_n(\xi)$ nach Potenzen von z ergibt sich aus (2)

$$c_\nu = c_0\, \frac{1\cdot 3\cdots(2\nu-1)\,(n+1)\,(n+2)\cdots(n+\nu)}{1\cdot 2\cdots \nu\,(2n+3)\,(2n+5)\cdots(2n+2\nu+1)} < c_0\, \frac{1\cdot 3\cdots(2\nu-1)}{\nu!\, 2^\nu},$$

daher

$$|\mathfrak{Q}_n(\xi)| < c_0\, z^{\frac{n+1}{2}}\, (1-z)^{-\frac{1}{2}},$$

und weil nach der STIRLINGschen Formel (II, 5·9)

(6) $$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^{n+1}\, n!}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)} \sqrt{\frac{n}{\pi}} = 1$$

ist,

(7) $$|\mathfrak{Q}_n(\xi)| < (1+\varepsilon) \sqrt{\frac{\pi}{n}}\, \frac{z^{\frac{n+1}{2}}}{\sqrt{1-z}}$$

für $n > N$ und $0 < z < 1$, also $\xi > 1$. Dabei ist ε eine beliebige positive Zahl, und N hängt von ε ab.

Im zweiten Fall $\left(\alpha = -\frac{n}{2}\right)$ erhalten wir aus (3) für $n > 0$

(8) $$c_\nu = c_0\, \frac{1\cdot 3\cdots(2\nu-1)\, n\,(n-1)\cdots(n-\nu+1)}{\nu!\,(2n-1)\,(2n-3)\cdots(2n-2\nu+1)}.$$

Setzen wir noch $\sqrt{z} = e^{i\vartheta}$, also $\xi = \cos\vartheta$, $z^{\frac{\nu}{2}} + z^{-\frac{\nu}{2}} = 2\cos\nu\vartheta$, so ergibt sich mit

(9) $$c_0 = \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n}$$

genau die Entwicklung (11·1), d. h.

(10) $$u_2 = P_n(\cos\vartheta).$$

Allerdings haben wir dort ϑ reell vorausgesetzt, während es hier wegen $\xi > 1$ imaginär ist. Die Formel (11·1) gilt aber allgemein, weil ihre beiden Seiten analytische Funktionen von ϑ sind. Für $n = 0$ erhält man in diesem Falle nach (3) die Lösung $u_2 = c_0$, also insbesondere $u_2 = P_0(\cos\vartheta) = 1$.

39. Asymptotische Abschätzung der Legendreschen Funktionen erster Art. In ähnlicher Weise wie $\mathfrak{Q}_n(\xi)$ können wir auch $P_n(\xi)$ abschätzen. Wir

bezeichnen die Koeffizienten in der Entwicklung von $(1-z)^{-\frac{1}{2}}$ mit β_ν, setzen also

(1) $$\beta_\nu = \frac{1\cdot 3\cdots(2\nu-1)}{2\cdot 4\cdots 2\nu}.$$

Für die Koeffizienten von $P_n(\xi)$ hatten wir nach (38·7) erhalten

(2) $$\gamma_\nu = \frac{c_\nu}{c_0} = \frac{1\cdot 3\cdots(2\nu-1)\, n(n-1)\cdots(n-\nu+1)}{1\cdot 2\cdots\nu\,(2n-1)(2n-3)\cdots(2n-2\nu+1)}.$$

Es ist somit

(3) $$0 < \gamma_\nu - \beta_\nu = \frac{1\cdot 3\cdots(2\nu-1)}{2\cdot 4\cdots 2\nu}\left[\frac{n(n-1)\cdots(n-\nu+1)}{\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(n-\nu+\frac{1}{2}\right)} - 1\right]$$
$$< \left(\frac{n}{n+\frac{1}{2}-\nu}\right)^\nu - 1 < \frac{1}{\left(1-\frac{\nu}{n}\right)^\nu} - 1 \leqq \frac{1}{\left(1-\frac{N}{n}\right)^N} - 1,$$

wenn $n > N$ und $1 \leqq \nu \leqq N$ ist. Halten wir nun N fest und wählen n entsprechend groß, so wird

(4) $$\gamma_\nu - \beta_\nu < \frac{\varepsilon}{2}$$

mit beliebig kleinem positivem ε. Ferner ist nach (1)

(5) $$\sum_{\nu=N+1}^{\infty} \beta_\nu z^\nu < \sum_{\nu=N+1}^{\infty} z^\nu = \frac{z^{N+1}}{1-z} < \frac{\varepsilon}{4},$$

wenn wir N bei gegebenem ε geeignet wählen und dabei $0 < z < 1$ berücksichtigen. Ebenso ist

(6) $$\sum_{\nu=N+1}^{\infty} \gamma_\nu z^\nu < \frac{\varepsilon}{4},$$

denn auch alle γ_ν sind kleiner als 1. Es ist nämlich

$$\gamma_\nu = \left(\frac{1}{1}\cdot\frac{n}{2n-1}\right)\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{n-1}{2n-3}\right)\left(\frac{5}{3}\cdot\frac{n-2}{2n-5}\right)\cdots,$$

wobei wir $\nu \leqq \frac{n}{2}$ voraussetzen können. Denn nach (11·1) ist $c_{n-\nu} = c_\nu$, also $\gamma_{n-\nu} = \gamma_\nu$. Jeder Faktor in γ_ν hat aber die Gestalt

$$\frac{\left(k-\frac{1}{2}\right)(n-k+1)}{k\left(n-k+\frac{1}{2}\right)} = \frac{k\left(n-k+\frac{1}{2}\right)+\frac{k}{2}-\frac{1}{2}(n-k+1)}{k\left(n-k+\frac{1}{2}\right)}$$
$$= \frac{k\left(n-k+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{n+1}{2}-k\right)}{k\left(n-k+\frac{1}{2}\right)}$$

und liegt daher zwischen 0 und 1, weil $1 \leqq k \leqq \nu \leqq \frac{n}{2} < \frac{n+1}{2}$ ist. (4), (5) und (6) liefern

$$(7)\quad \left|\sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_\nu z^\nu - \sum_{\nu=0}^{\infty} \beta_\nu z^\nu\right| \leqq \sum_{\nu=1}^{N} (\gamma_\nu - \beta_\nu) z^\nu + \left|\sum_{\nu=N+1}^{\infty} \gamma_\nu z^\nu\right| + \left|\sum_{\nu=N+1}^{\infty} \beta_\nu z^\nu\right| < \varepsilon.$$

Ist also ε gegeben, so wählen wir N so, daß (5) und (6), und nachher u entsprechend groß, daß (4) erfüllt ist. Nach (2), (38·5), (38·9) und (38·10) ist

$$\sum_{\nu=0}^{n} \gamma_\nu z^\nu = \frac{z^{\frac{n}{2}}}{c_0} P_n(\xi), \qquad c_0 = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2n},$$

daher gemäß (7), weil $\sum_{\nu=0}^{\infty} \beta_\nu z^\nu = (1-z)^{-\frac{1}{2}}$ ist,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{2 \cdot 4 \cdots 2n}{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)} z^{\frac{n}{2}} P_n(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1-z}},$$

somit nach (38·5)

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt{\pi n z^n}\, P_n(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1-z}}$$

oder

$$(8)\qquad |P_n(\xi)| > \frac{1-\varepsilon}{\sqrt{n \pi z^n (1-z)}}.$$

Dabei ist ε eine beliebig kleine positive Zahl und n entsprechend groß zu wählen (diese Wahl hängt noch von ε ab).

Aus (38·7) und (8) ergibt sich jetzt

$$\left|\frac{\mathfrak{Q}_n(\xi)}{P_n(\xi)}\right| < \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \pi z^{n+\frac{1}{2}}$$

oder

$$(9)\qquad \lim_{n \to +\infty} \frac{\mathfrak{Q}_n(\xi)}{P_n(\xi)} = 0$$

für $0 < z < 1$ oder $\xi > 1$.

40. Zusammenhang mit den Kettenbrüchen. Wir gehen von der Formel (32·6) aus, nämlich

$$(1)\qquad \mathfrak{Q}_n(\xi) = \frac{1}{2} P_n(\xi) \ln \frac{\xi+1}{\xi-1} - W_{n-1}(\xi)$$

und von den Rekursionsformeln (12·1) und (36·1)

$$(2)\qquad \begin{cases} (n+1) P_{n+1}(\xi) - (2n+1)\, \xi P_n(\xi) + n P_{n-1}(\xi) = 0, \\ (n+1) \mathfrak{Q}_{n+1}(\xi) - (2n+1)\, \xi \mathfrak{Q}_n(\xi) + n \mathfrak{Q}_{n-1}(\xi) = 0. \end{cases}$$

Aus (1) und (2) ergibt sich für $W_n(\xi)$ die Rekursionsformel

(3) $$(n+1)\,W_n(\xi) - (2n+1)\,\xi\,W_{n-1}(\xi) + n\,W_{n-2}(\xi) = 0 \quad (n > 0).$$

Wir setzen nun

(4) $$\begin{cases} Z_n = \dfrac{n!\,W_{n-1}}{1\cdot 3\cdots(2n-1)}, \\ N_n = \dfrac{n!\,P_n}{1\cdot 3\cdots(2n-1)} \end{cases}$$

und erhalten für Z_n und N_n aus (3) und (2) die Rekursionsformeln

(5) $$\begin{cases} Z_{n+1} = \xi\,Z_n - b_n\,Z_{n-1}, \\ N_{n+1} = \xi\,N_n - b_n\,N_{n-1}, \end{cases}$$

wobei $b_n = \dfrac{n^2}{4n^2-1}$ ist.

Aus diesen Formeln sieht man, daß $\dfrac{Z_n}{N_n}$ die Näherungsbrüche des Kettenbruches

$$\cfrac{1}{\xi - \cfrac{b_1}{\xi - \cfrac{b_2}{\xi - \cdots}}}$$

sind; d. h. bricht man den Bruch mit $\dfrac{b_n}{\xi}$ ab, so ist sein Wert durch $\dfrac{Z_{n+1}}{N_{n+1}}$ gegeben. Hat man nämlich den Kettenbruch

$$-\cfrac{b_0}{\xi_0 - \cfrac{b_1}{\xi_1 - \cfrac{b_2}{\xi_2 - \cdots}}}$$

und bedeutet $\dfrac{p_n}{q_n}$ den n-ten Näherungsbruch, so erhält man

$$\begin{aligned} p_1 &= -b_0, & q_1 &= \xi_0, \\ p_2 &= -\xi_1 b_0, & q_2 &= \xi_0\xi_1 - b_1, \\ p_3 &= -b_0(\xi_1\xi_2 - b_2) & q_3 &= \xi_0(\xi_1\xi_2 - b_2) - b_1\xi_2 \\ &= \xi_2 p_2 - b_2 p_1, & &= \xi_2 q_2 - b_2 q_1. \end{aligned}$$

Ersetzt man nun in den letzten Formeln ξ_2 durch $\xi_2 - \dfrac{b_3}{\xi_3}$, so ergibt sich der Zähler p_4 des vierten Näherungsbruches proportional

$$\left(\xi_2 - \frac{b_3}{\xi_3}\right) p_2 - b_2\,p_1 = \left(\xi_2 - \frac{b_3}{\xi_3}\right) p_2 + p_3 - \xi_2\,p_2 = \frac{\xi_3\,p_3 - b_3\,p_2}{\xi_3}$$

und ebenso der Nenner q_4 proportional $\dfrac{\xi_3\,q_3 - b_3\,q_2}{\xi_3}$, d. h. wir können schreiben

$$\begin{cases} p_4 = \xi_3\,p_3 - b_3\,p_2, \\ q_4 = \xi_3\,q_3 - b_3\,q_2. \end{cases}$$

So weiter schließend, erhält man daraus entsprechend

$$\begin{cases} p_{n+1} = \xi_n p_n - b_n p_{n-1}, \\ q_{n+1} = \xi_n q_n - b_n q_{n-1}, \end{cases}$$

also genau die Formeln (5) mit $b_0 = -1$ und $\xi_n = \xi$ für alle n. Wir haben jetzt nur noch nachzuweisen, daß in unserem Fall die beiden ersten Näherungsbrüche stimmen. Nach (13·1) und (37·2) ist

$$(6) \qquad P_0 = 1, \quad P_1 = \xi, \quad P_2 = \frac{3}{2}\xi^2 - \frac{1}{2}, \quad W_0 = 1, \quad W_1 = \frac{3}{2}\xi,$$

daher nach (4)

$$Z_1 = 1, \quad Z_2 = \xi, \quad N_1 = \xi, \quad N_2 = \xi^2 - \frac{1}{3},$$

ferner $b_1 = \frac{1}{3}$ nach (5). Für die ersten Näherungsbrüche des Kettenbruches $\cfrac{1}{\xi - \cfrac{b_1}{\xi - \cfrac{b_2}{\xi - \cdots}}}$ ergeben sich $\frac{1}{\xi}$ und $\cfrac{\xi}{\xi^2 - \frac{1}{3}}$, also tatsächlich die Werte $\frac{Z_1}{N_1}$ und $\frac{Z_2}{N_2}$. Damit ist unsere Behauptung in allen Teilen bewiesen.

Es folgt jetzt aus (1)

$$\frac{\mathfrak{Q}_n}{P_n} = \frac{1}{2}\ln\frac{\xi+1}{\xi-1} - \frac{W_{n-1}}{P_n}$$

oder wegen (4)

$$(7) \qquad \frac{W_{n-1}}{P_n} = \frac{Z_n}{N_n} = \frac{1}{2}\ln\frac{\xi+1}{\xi-1} - \frac{\mathfrak{Q}_n}{P_n},$$

daher durch Grenzübergang für $n \to +\infty$

$$(8) \qquad \cfrac{1}{\xi - \cfrac{b_1}{\xi - \cfrac{b_2}{\xi - \cdots}}} = \frac{1}{2}\ln\frac{\xi+1}{\xi-1} \quad \text{für } \xi > 1,$$

wenn wir noch (39·9) berücksichtigen. Diese letzte Formel findet sich bei Gauss[1]), auf den Zusammenhang mit den Kugelfunktionen hat Jacobi[2]) hingewiesen.

41. Näherungsweise Berechnung bestimmter Integrale. $f(x)$ sei stetig im Intervall $I(-1 \leqq x \leqq +1)$. Wir suchen einen Näherungswert für $\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx$ dadurch zu erhalten, daß wir $f(x)$ durch eine Funktion $\Phi(x)$ ersetzen derart, daß sich $\int_{-1}^{+1} \Phi(x)\,dx$ einfach berechnen läßt und ein Nähe-

[1]) Vgl. Fußnote in Ziffer 41.

[2]) C. G. J. Jacobi, J. reine angew. Math. 2 (1827) 226.

rungswert von $\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx$ ist. Wir wählen zu diesem Zweck n Zahlen a_1, $a_2, \ldots, a_n$ im Intervall I so, daß $-1 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n < +1$ ist und setzen

$$(1)\qquad F(x) = \prod_{\nu=1}^{n} (x - a_\nu).$$

Die LAGRANGEsche Interpolationsformel

$$(2)\qquad \Phi(x) = F(x) \sum_{\nu=1}^{n} \frac{f(a_\nu)}{(x - a_\nu)\,F'(a_\nu)}$$

liefert das einzige Polynom, dessen Grad $n - 1$ nicht übersteigt und das an den Stellen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gerade die Werte $f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_n)$ annimmt. Setzen wir

$$(3)\qquad A_\nu = \frac{1}{F'(a_\nu)} \int_{-1}^{+1} \frac{F(x)}{x - a_\nu}\,dx \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

so ist

$$(4)\qquad \int_{-1}^{+1} \Phi(x)\,dx = \sum_{\nu=1}^{n} A_\nu f(a_\nu).$$

Die Zahlen A_ν hängen von $f(x)$ nicht ab, sondern nur von den a_ν und können daher ein für allemal berechnet werden, wenn die a_ν gegeben sind, NEWTON[1]) und COTES[2]) wählten die Stellen a_ν so, daß das gegebene Intervall in gleiche Teile geteilt wird, und erhielten in (4) einen Näherungswert für $\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx$. GAUSS[3]) bemerkte, daß man eine bessere Näherung erzielen kann, wenn man für die a_ν die Nullstellen der Kugelfunktion $P_n(x)$ wählt.

Der Fehler, den man erhält, wenn man das eigentlich zu berechnende Integral durch (4) ersetzt, ist

$$(5)\qquad D(f) = \int_{-1}^{+1} f(x)\,dx - \sum_{\nu=1}^{n} A_\nu f(a_\nu).$$

Ist $f(x)$ ein Polynom, dessen Grad $n - 1$ nicht übersteigt, so ist $D(f) = 0$ bei beliebigen a_ν. Denn in diesem Fall ist $f(x) = \Phi(x)$, weil

---

1) J. NEWTON, Methodus differentialis (1711), abgedruckt Werke Bd. 1 (Ausgabe von Horsley, 1778), S. 521—533.

2) R. COTES, Harmonia mensurarum, Anhang: De methodo differentiali Newtonia, Cambridge 1722.

3) C. F. GAUSS, Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi, Gött. Comm. Bd. 3 (1814), oder Werke Bd. 3, S. 163. Die drei erwähnten Abhandlungen von NEWTON, COTES und GAUSS sind übersetzt und herausgegeben von A. KOWALEWSKI in einem Buch: Newton, Cotes, Gauß, Jacobi, Leipzig 1917.

beide Funktionen $f(x)$ und $\Phi(x)$ an den n verschiedenen Stellen a_ν jeweils dieselben Werte $f(a_\nu)$ annehmen.

Wählt man aber mit GAUSS für die a_ν die Nullstellen von $P_n(x)$, so ist sogar dann $D(f) = 0$, wenn $f(x)$ ein Polynom ist, dessen Grad $2n - 1$ nicht übersteigt. Wir können das in folgender Weise einsehen: $f(x) - \Phi(x)$ verschwindet an den Stellen a_ν, ist also durch $F(x)$ teilbar, somit ist $\frac{f(x) - \Phi(x)}{F(x)}$ ein Polynom höchstens $(n-1)$-ten Grades, wenn der Grad von $f(x)$ $2n - 1$ nicht übersteigt, daher

$$f(x) = \Phi(x) + F(x)\,(b_0 + b_1 x + \cdots + b_{n-1} x^{n-1}).$$

Soll $\int\limits_{-1}^{+1} f(x)\,dx - \int\limits_{-1}^{+1} \Phi(x)\,dx$ für alle Polynome $f(x)$, deren Grad $2n-1$ nicht übersteigt, sonach für beliebige Werte der b_ν verschwinden, so muß gelten

$$\int\limits_{-1}^{+1} x^\nu F(x)\,dx = 0 \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

Dazu ist aber nach der vorigen Ziffer notwendig und hinreichend, daß $F(x)$ bis auf einen konstanten Faktor mit $P_n(x)$ übereinstimmt. Dieser Faktor ist so zu wählen, daß x^n in $F(x)$ den Koeffizienten 1 erhält, also

$$F(x) = \frac{n!}{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)} P_n(x) \tag{6}$$

nach (13·3). Die a_ν sind daher die n Nullstellen von $P_n(x)$.

Sie liegen nach Ziffer 17 tatsächlich zwischen -1 und $+1$, und zwar nach (13·4) spiegelbildlich zum Nullpunkt, also ist

$$a_\nu = -a_{n-\nu+1}. \tag{7}$$

Ferner ist $F(-x) = (-1)^n F(x)$ nach (6) und (13·4), daher ist $F'(-x) = (-1)^{n-1} F'(x)$ und $F'(a_{n-\nu+1}) = (-1)^{n-1} F'(a_\nu)$ nach (7), hiermit wegen (3), (13·4) und (7)

$$A_{n-\nu+1} = \frac{(-1)^{n-1}}{F'(a_\nu)} \int\limits_{-1}^{+1} \frac{F(x)}{x + a_\nu}\,dx = \frac{1}{F'(a_\nu)} \int\limits_{-1}^{+1} \frac{F(u)}{u - a_\nu}\,du = A_\nu, \tag{8}$$

wobei im Integral $u = -x$ als Veränderliche eingeführt wurde. Da die A_ν von $f(x)$ nicht abhängen, können wir ihre Summe bestimmen, indem wir $f(x) = 1$ in (5) setzen. Es folgt $\sum\limits_{\nu=1}^{n} A_\nu = 2$, weil in diesem Fall $D(f) = 0$ ist. Aus (3), (6), (35·2), (32·7) und (32·5) erhält man, wenn man ξ z. B. auf der

oberen Halbebene gegen a_ν streben läßt,

$$(9)\qquad A_\nu = \frac{1}{P_n'(a_\nu)} \int_{-1}^{+1} \frac{P_n(x)\,dx}{x - a_\nu} = -\frac{1}{P_n'(a_\nu)} \lim_{\xi \to a_\nu} \int_{-1}^{+1} \frac{P_n(x)\,dx}{\xi - x}$$

$$= -\frac{2 \lim\limits_{\xi \to a_\nu} \mathfrak{Q}_n(\xi)}{P_n'(a_\nu)} = -\frac{2\,\mathfrak{Q}_n(a_\nu)}{P_n'(a_\nu)} = \frac{2\,W_{n-1}(a_\nu)}{P_n'(a_\nu)} = 2\,b_\nu\,.$$

Mit Hilfe von (40·6) und (40·3) läßt sich daraus leicht A_ν berechnen.

42. Fehlerabschätzung. Wir setzen $f(x) = x^k$ (k positive ganze Zahl). Ist k ungerade, so erhalten wir $D(x^k) = 0$, weil $\int\limits_{-1}^{+1} x^k\,dx = 0$ und $\sum\limits_{\nu=1}^{n} A_\nu a_\nu^k = 0$ ist wegen $A_{n-\nu+1} = A_\nu$ und $a_{n-\nu+1}^k = -a_\nu^k$ nach (41·7) und (41·8). Um $D(x^k)$ für gerades k zu erhalten, benützen wir die Funktion $\mathfrak{Q}_n(x)$.

Es ist nach (32·6), (41·9), (41·7), (41·8) und (41·5) für $|\xi| > 1$ wegen $|a_\nu| < 1$ (vgl. Ziffer 17)

$$(1)\qquad \frac{2\,\mathfrak{Q}_n(\xi)}{P_n(\xi)} = \ln\frac{\xi+1}{\xi-1} - \sum_{\nu=1}^{n} \frac{A_\nu}{\xi - a_\nu}$$

$$= \ln\left(1 + \frac{1}{\xi}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{\xi}\right) - \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n} \frac{A_\nu}{\xi - a_\nu} - \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n} \frac{A_\nu}{\xi + a_\nu}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k\,\xi^k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\,\xi^k} - \frac{1}{2\xi}\sum_{\nu=1}^{n} \frac{A_\nu}{1 - \frac{a_\nu}{\xi}} - \frac{1}{2\xi}\sum_{\nu=1}^{n} \frac{A_\nu}{1 + \frac{a_\nu}{\xi}}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{(2k+1)\,\xi^{2k+1}} - \frac{1}{2\xi}\sum_{\nu=1}^{n} A_\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_\nu^k}{\xi^k} - \frac{1}{2\xi}\sum_{\nu=1}^{n} A_\nu \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{a_\nu^k}{\xi^k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{(2k+1)\,\xi^{2k+1}} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\xi^{2k+1}} \sum_{\nu=1}^{n} A_\nu a_\nu^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D(x^{2k})}{\xi^{2k+1}}\,.$$

Ferner ist nach (35·2)

$$(2)\qquad \frac{2\,\mathfrak{Q}_n(\xi)}{P_n(\xi)} = \frac{1}{P_n(\xi)} \int_{-1}^{+1} \frac{P_n(x)\,dx}{\xi - x}\,.$$

Wir entwickeln diese Funktion nach fallenden Potenzen von ξ und erhalten zufolge (1) in den Koeffizienten die gesuchten Fehler $D(x^{2k})$. Schreiben wir kurz $P_n(x) = \sum\limits_{\nu=0}^{n} C_\nu x^{n-\nu}$, also $C_0 = \dfrac{1\cdot 3 \cdots (2n-1)}{n!}$ nach (13·3),

so wird gemäß (31·2) und (31·5)

$$\frac{2\,\mathfrak{Q}_n(\xi)}{P_n(\xi)} = \frac{1}{C_0\xi^{n+1}}\left(1 + \frac{C_1}{C_0\xi} + \cdots\right)^{-1}\int_{-1}^{+1} P_n(x)\left(1 + \frac{x}{\xi} + \frac{x^2}{\xi^2} + \cdots\right)dx$$

$$= \frac{1}{C_0\xi^{2n+1}}\int_{-1}^{+1} P_n(x)\,x^n\,dx + \cdots$$

$$= \frac{2}{2n+1}\left[\frac{n!}{1\cdot 3\cdots(2n-1)}\right]^2\frac{1}{\xi^{2n+1}} + \cdots$$

Denn es ist $\int_{-1}^{+1} P_n(x)\,x^n\,dx = 2\int_0^1 P_n(x)\,x^n\,dx$, weil die Exponenten von x im Integranden gerade Zahlen sind. Weil die Entwicklung mit $\xi^{-(2n+1)}$ beginnt, ist in Übereinstimmung mit der vorigen Ziffer $D(x^k) = 0$ für $k \leqq 2n - 1$. Für $D(x^{2n})$ ergibt sich

$$D(x^{2n}) = \frac{2}{2n+1}\left[\frac{n!}{1\cdot 3\cdots(2n-1)}\right]^2.$$

Läßt sich die Funktion durch eine im Intervall I gleichmäßig konvergente Potenzreihe $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ darstellen, so erhält man nach den bisherigen Ergebnissen

$$D(f) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k\left(\int_{-1}^{+1} x^k dx - \sum_{\nu=1}^{n} A_\nu a_\nu^k\right) = \sum_{k=n}^{\infty} c_{2k} D(x^{2k}).$$

Gauss hat folgende Zahlenwerte berechnet (wir geben sie auf 5 Stellen genau):

$n = 1$: $a_1 = 0$, $A_1 = 2$, $D(x^2) = \frac{2}{3}$,

$n = 2$: $-a_1 = a_2 = 0{,}57735$, $A_1 = A_2 = 1$, $D(x^4) = \frac{8}{45}$,

$n = 3$: $-a_1 = a_3 = 0{,}77460$, $a_2 = 0$,
$A_1 = A_3 = \frac{5}{9}$, $A_2 = \frac{8}{9}$, $D(x^6) = \frac{8}{175}$,

$n = 4$: $-a_1 = a_4 = 0{,}86114$, $-a_2 = a_3 = 0{,}33998$,
$A_1 = A_4 = 0{,}34785$, $A_2 = A_3 = 0{,}65215$,
$D(x^8) = \frac{128}{11025}$,

$n = 5$: $-a_1 = a_5 = 0{,}90618$, $-a_2 = a_4 = 0{,}53847$,
$a_3 = 0$, $A_1 = A_5 = 0{,}23693$,
$A_2 = A_4 = 0{,}47863$, $A_3 = \frac{128}{225}$,
$D(x^{10}) = \frac{128}{43659}$,

$$n = 6:\quad -a_1 = a_6 = 0{,}93247,\qquad -a_2 = a_5 = 0{,}66121,$$
$$-a_3 = a_4 = 0{,}23862,\qquad A_1 = A_6 = 0{,}17132,$$
$$A_2 = A_5 = 0{,}36076,\qquad A_3 = A_4 = 0{,}46791,$$
$$D(x^{12}) = \frac{512}{693\,693},$$

$$n = 7:\quad -a_1 = a_7 = 0{,}94911,\qquad -a_2 = a_6 = 0{,}74153,$$
$$-a_3 = a_5 = 0{,}40585,\qquad a_4 = 0,$$
$$A_1 = A_7 = 0{,}12948,\qquad A_2 = A_6 = 0{,}27971,$$
$$A_3 = A_5 = 0{,}38183,\qquad A_4 = \frac{512}{12\,259},$$
$$D(x^{14}) = \frac{512}{2\,760\,615}.$$

Diese Zahlen sind dem in der Fußnote von Ziffer 18 genannten Buch von HOBSON entnommen, wo sie auf 16 Stellen angegeben sind.

43. Zugeordnete Legendresche Funktionen zweiter Art. Ebenso wie die m-te Ableitung von $P_n(\xi)$ genügt auch die m-te Ableitung von $\mathfrak{Q}_n(\xi)$ der Differentialgleichung (18·1), weil diese durch m-malige Differentiation aus der Differentialgleichung (9·1) entstanden ist, der $\mathfrak{Q}_n(\xi)$ genügt. Da $\mathfrak{Q}_n^{(m)}(\xi)$ logarithmische Singularitäten enthält, $P_n^{(m)}(\xi)$ aber ein Polynom ist (es wird $m \leqq n$ vorausgesetzt), sind beide Funktionen voneinander unabhängig; $A\,P_n^{(m)}(\xi) + B\,\mathfrak{Q}_n^{(m)}(\xi)$ mit willkürlichen Konstanten A und B ist infolgedessen die allgemeine Lösung von (18·1) für $0 \leqq m \leqq n$.

Für beliebiges ξ, das nicht zwischen -1 und $+1$ liegt, wollen wir nun $\mathfrak{P}_n^m(\xi)$ und $\mathfrak{Q}_n^m(\xi)$ durch

(1) $$\begin{cases} \mathfrak{P}_n^m(\xi) = (\xi^2-1)^{\frac{m}{2}}\, P_n^{(m)}(\xi), \\ \mathfrak{Q}_n^m(\xi) = (\xi^2-1)^{\frac{m}{2}}\, \mathfrak{Q}_n^{(m)}(\xi) \end{cases}$$

definieren (Bezeichnung nach M.-O., S. 80), wobei $\sqrt{\xi^2-1} > 0$ für $\xi > 1$ sein soll.

Genau wie in Ziffer 32 erhält man jetzt mit $h > 0$

(2) $$\lim_{h\to 0} \mathfrak{P}_n^m(\cos\vartheta \pm hi) = e^{\pm\frac{m\pi i}{2}} \sin^m\vartheta\, P_n^{(m)}(\cos\vartheta),$$

also nach (18·2)

(3) $$P_n^m(\cos\vartheta) = e^{\pm\frac{m\pi i}{2}} \lim_{h\to 0} \mathfrak{P}_n^m(\cos\vartheta \pm hi).$$

Die Funktion $\mathfrak{Q}_n^m(\xi)$ nennt man die zugeordnete LEGENDREsche Funktion zweiter Art.

44. Unendliche Produkte. In der nächsten Ziffer brauchen wir einen Satz über die Konvergenz unendlicher Produkte. Wir betrachten $\prod_{\nu=1}^{n}(1+\alpha_\nu)$ mit $-1<\alpha_\nu<+1$ und nehmen davon den Logarithmus. Dann folgt nach dem TAYLORschen Satz

(1) $$\sum_{\nu=1}^{n}\ln(1+\alpha_\nu)=\sum_{\nu=1}^{n}\alpha_\nu-\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\alpha_\nu^2}{(1+\vartheta_\nu\alpha_\nu)^2},$$

wobei alle ϑ_ν zwischen 0 und 1 liegen. Konvergiert $\sum_{\nu=1}^{\infty}|\alpha_\nu|$, so konvergiert auch $\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu^2$, weil $\alpha_\nu^2<|\alpha_\nu|<1$ ist. Ferner ist $\lim_{\nu\to+\infty}(1+\vartheta_\nu\alpha_\nu)=1$, weil $\lim_{\nu\to+\infty}\alpha_\nu=0$ ist wegen der Konvergenz von $\sum_{\nu=1}^{\infty}|\alpha_\nu|$, d. h. es gibt eine feste positive Zahl p derart, daß $1+\vartheta_\nu\alpha_\nu>p$ für alle ν ist. Man hat daher

$$\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\alpha_\nu^2}{(1+\vartheta_\nu\alpha_\nu)^2}<\frac{1}{p^2}\sum_{\nu=1}^{n}\alpha_\nu^2;$$

somit konvergiert auch die zweite Summe in (1). Es ist also

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{\nu=1}^{n}\ln(1+\alpha_\nu)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\ln(1+\alpha_\nu)$$

und deshalb auch

$$\lim_{n\to+\infty}\prod_{\nu=1}^{n}(1+\alpha_\nu)=\prod_{\nu=1}^{\infty}(1+\alpha_\nu)$$

vorhanden und endlich, und zwar ist $\prod_{\nu=1}^{\infty}(1+\alpha_\nu)>0$.

45. Die Legendreschen Polynome als Eigenfunktionen. Wir gehen von der Differentialgleichung (9·1) aus, die wir jetzt in folgender Gestalt schreiben wollen, indem wir $n(n+1)$ durch eine beliebige reelle Zahl λ ersetzen:

(1) $$(1-x^2)\,u''-2xu'+\lambda u=0.$$

Wir setzen eine Lösung in der Form einer Potenzreihe an, d. h.

(2) $$u=\sum_{\nu=0}^{\infty}c_\nu x^\nu,$$

und beschränken uns auf das reelle Gebiet. Durch Einsetzen von (2) in (1) folgt

$$(\nu+2)(\nu+1)\,c_{\nu+2}=[\nu(\nu-1)+2\nu-\lambda]\,c_\nu$$

oder

(3) $$c_{\nu+2}=\frac{\nu(\nu+1)-\lambda}{(\nu+1)(\nu+2)}\,c_\nu.$$

Weil $\lim\limits_{\nu\to+\infty} \frac{c_{\nu+2}}{c_\nu} = 1$ ist, konvergiert (2) für $|x| < 1$ (vgl. II, 9). Wählen wir z. B. $c_0 = 1$ und alle $c_{2\nu+1} = 0$, so erhalten wir aus (3) eine Lösung, die ungeändert bleibt, wenn man x mit $-x$ vertauscht (gerade Funktion); wählen wir $c_1 = 1$ und alle $c_{2\nu} = 0$, so ändert die Lösung das Zeichen, wenn wir x mit $-x$ vertauschen (ungerade Funktion). In beiden Fällen ergibt sich aus (3), wenn $\lambda \neq n(n+1)$ und

$$\nu = k + 2\mu \qquad (\mu = 1, 2, 3, \ldots)$$

ist,

$$(4)\quad c_\nu = c_k\, k \left[1 - \frac{\lambda}{k(k+1)}\right]\left[1 - \frac{\lambda}{(k+2)(k+3)}\right]\cdots\left[1 - \frac{\lambda}{(\nu-2)(\nu-1)}\right]\frac{1}{\nu}.$$

k sei fest, > 1 und so groß, daß $k(k+1) > |\lambda|$ ist.

Setzen wir $\alpha_\mu = -\frac{\lambda}{(k+2\mu-2)(k+2\mu-1)}$, so ist $|\alpha_\mu| < 1$, ferner

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} |\alpha_\mu| = |\lambda| \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{(k+2\mu-2)^2\left(1 + \frac{1}{k+2\mu-2}\right)}$$

$$< |\lambda| \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{(k+2\mu-2)^2} < |\lambda| \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu^2},$$

somit konvergiert $\sum\limits_{\mu=1}^{\infty} |\alpha_\mu|$, daher gemäß der vorigen Ziffer auch $\prod\limits_{\mu=1}^{\infty} (1 + \alpha_\mu) > 0$.

Es gibt infolgedessen eine feste positive Zahl C, so daß

$$|c_k|\, k \prod_{\mu=1}^{\frac{\nu-k}{2}} (1 + \alpha_\mu) > C,$$

also

$$(5)\qquad |c_\nu| > \frac{C}{\nu}$$

gemäß (4) für alle $\nu = k + 2\mu$ $(\mu = 1, 2, \ldots)$ ist. Wegen $k(k+1) > |\lambda|$ haben nach (4) alle Glieder von $\sum\limits_{\nu=k+1}^{\infty} c_\nu x^\nu$ dasselbe Vorzeichen; es ist daher gemäß (5)

$$\left|\sum_{\nu=k+1}^{\infty} c_\nu x^k\right| > C \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{|x|^{k+2\mu}}{k+2\mu}.$$

Bei geradem $k = 2m$ ist

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{x^{2(m+\mu)}}{2(m+\mu)} = -\frac{1}{2}\ln(1-x^2) - \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{m} \frac{x^{2\nu}}{\nu} \to +\infty \text{ für } x \to \pm 1,$$

bei ungeradem $k = 2m + 1$ ist

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{|x|^{2m+2\mu+1}}{2m+2\mu+1} = |x| \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{x^{2(m+\mu)}}{2(m+\mu)} \, \frac{2(m+\mu)}{2m+2\mu+1}$$

$$> \frac{2m}{2m+1} |x| \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{x^{2(m+\mu)}}{2(m+\mu)} \to +\infty \text{ für } x \to \pm 1.$$

Unsere Lösung ist somit in beiden Fällen der geraden oder ungeraden Funktionen für $x = \pm 1$ nicht stetig.

Wenn wir also fordern, daß eine nicht identisch verschwindende Lösung $u = f(x)$ der Differentialgleichung (1) für $x = \pm 1$ stetig sein soll, so muß $\lambda = n(n+1)$ sein. Denn mit $f(x)$ sind auch $f(-x)$, daher auch $f(x) \pm f(-x)$ Lösungen, die für $x = \pm 1$ stetig sind und nicht gleichzeitig identisch verschwinden, weil sonst $f(x)$ und $f(-x)$ identisch Null sein müßten, was wir ausgeschlossen haben. $f(x) + f(-x)$ und $f(x) - f(-x)$ sind aber gerade bzw. ungerade Funktionen, daher durch Potenzreihen von der Form (2) darstellbar, in denen entweder nur Potenzen mit geraden oder nur solche mit ungeraden Exponenten vorkommen. Von diesen haben wir aber gesehen, daß sie für $x = \pm 1$ nur dann stetig sind, wenn $\lambda = n(n+1)$ ist. Wenn das der Fall ist, so bricht die Reihe nach Formel (3) ab, die Lösung ist ein Polynom, fällt daher, weil die allgemeine Lösung in diesem Fall $A P_n(x) + B \mathfrak{Q}_n(x)$ ist und $\mathfrak{Q}_n(x)$ bei $x = \pm 1$ logarithmisch unendlich wird, bis auf einen festen Faktor mit dem LEGENDREschen Polynom $P_n(x)$ zusammen.

Man nennt eine Lösung der Differentialgleichung (1), die an den singulären Stellen ± 1 der Differentialgleichung für bestimmte Werte des Parameters λ stetig ist, eine zu dieser Stetigkeitsforderung gehörige Eigenfunktion und die zugehörigen Werte von λ die zu dieser Forderung gehörigen Eigenwerte der Differentialgleichung. Zur Forderung der Stetigkeit der Lösung in den singulären Punkten gehören also die Eigenwerte $\lambda = n(n+1)$ mit $n = 0, 1, 2, \ldots$; die zugehörigen Eigenfunktionen sind bis auf konstante Faktoren die LEGENDREschen Polynome $P_n(x)$.

46. Die zugeordneten Legendreschen Funktionen als Eigenfunktionen. Differenziert man die Gleichung (45·1), so erhält man für u' wieder eine Differentialgleichung zweiter Ordnung, deren Lösungen die differenzierten Lösungen von (45·1) sind, daher ebenfalls unstetig für $x = \pm 1$, wenn nicht $\lambda = n(n+1)$ ist. Die m-mal differenzierte Gleichung (45·1) oder Gleichung (18·1), in der $n(n+1)$ durch λ ersetzt wird, hat also bei unserer Stetigkeitsforderung die Eigenwerte $\lambda = n(n+1)$ mit den Eigenfunktionen $P_n^{(m)}(x)$, daher sind die zugeordneten Funktionen $P_n^m(x)$ die Eigen-

funktionen der Gleichung (18·4), in der $n(n+1)$ durch λ ersetzt ist, mit den Eigenwerten $\lambda = n(n+1)$.

Die Multiplikation der Lösungen von (18·1) mit $(x^2-1)^{\frac{m}{2}}$ kann nämlich aus der Unstetigkeitsstelle keine Stetigkeitsstelle machen. Zum Beweise führen wir in der Differentialgleichung (18·1), um die Entwicklung der Lösung an den Stellen ± 1 zu finden, die Veränderliche $\zeta = \xi \mp 1$ ein. Es ergibt sich dann die Differentialgleichung

$$-\zeta(\pm 2+\zeta)\frac{d^2u}{d\zeta^2} - 2(m+1)(\pm 1+\zeta)\frac{du}{d\zeta} + [\lambda - m(m+1)]\,u = 0,$$

wenn wir λ an Stelle von $n(n+1)$ schreiben. Der Ansatz $u = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu \zeta^{\alpha+\nu}$ liefert durch Vergleich der Koeffizienten der niedrigsten Potenzen $\alpha = 0$ und $\alpha = -m$. Betrachten wir nun die kritische Stelle 1. Der erste der beiden Werte von α gibt uns nach der allgemeinen Theorie der Differentialgleichungen die reguläre Lösung, der zweite eine Lösung, in der ein Glied $(x-1)^{-m}$, also nach Multiplikation mit $(x^2-1)^{\frac{m}{2}}$ ein Glied $(x-1)^{-\frac{m}{2}}$ auftritt, infolgedessen auch dann in 1 unstetig ist. Da die erste Lösung der Gleichung (18·1) an der Stelle 1 stetig ist, muß sie für $\lambda \neq n(n+1)$ an der Stelle -1 unstetig werden, daher gemäß der eben durchgeführten Überlegung ein Glied $(x+1)^{-m}$, infolgedessen nach Multiplikation mit $(x^2-1)^{\frac{m}{2}}$ ein Glied $(x+1)^{-\frac{m}{2}}$ enthalten, ist also auch dann noch bei -1 unstetig.

§ 6. Kugelflächenfunktionen.

47. Laplacesche Kugelfunktionen. In Ziffer 7 und 8 haben wir gesehen, daß sich die allgemeinste ganze rationale räumliche Kugelfunktion n-ten Grades in der Gestalt $U_n = r^n S_n(\vartheta, \varphi)$ darstellen läßt, wobei U_n ein Polynom n-ten Grades in x, y, z ist, das von höchstens $2n+1$ willkürlichen Konstanten linear homogen abhängt. Wir nennen $S_n(\vartheta, \varphi)$ eine Laplacesche Kugelfunktion n-ten Grades. Sie ist eine Kugelflächenfunktion und genügt der Differentialgleichung

$$(1)\qquad n(n+1)\,S_n + \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial S_n}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 S_n}{\partial\varphi^2} = 0.$$

Um eine Lösung dieser Gleichung zu finden, setzen wir $S_n = \Theta\,\Phi$, wobei Θ nur von ϑ, Φ nur von φ abhängen soll. Man erhält

$$n(n+1)\,\Theta\,\Phi + \frac{\Phi}{\sin\vartheta}\frac{d}{d\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{d\Theta}{d\vartheta}\right) + \frac{\Theta}{\sin^2\vartheta}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} = 0$$

oder

$$n(n+1)\sin^2\vartheta + \frac{\sin\vartheta}{\Theta}\frac{d}{d\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{d\Theta}{d\vartheta}\right) = -\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}.$$

Differenziert man nach φ, so folgt

$$\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}\right) = 0,$$

daher

$$\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} = -m^2,$$

wobei m eine Konstante ist, also

$$\Phi = A_m \cos m\varphi + B_m \sin m\varphi.$$

Für Θ ergibt sich die Differentialgleichung

$$\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{d}{d\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{d\Theta}{d\vartheta}\right) + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2\vartheta}\right]\Theta = 0.$$

Sie wird nach (18·4) für ganzzahlige $0 \leq m \leq n$ durch $\Theta = P_n^m(\cos\vartheta)$ befriedigt. Wir erhalten also, weil die Differentialgleichung (1) linear homogen ist, in

$$(2) \qquad S_n(\vartheta, \varphi) = \sum_{m=0}^{n} (A_m \cos m\varphi + B_m \sin m\varphi)\, P_n^m(\cos\vartheta)$$

eine Lösung von (1); sie enthält die $2n+1$ willkürlichen Konstanten $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n, B_1, B_2, \ldots, B_n$ linear homogen. Sie ist die gesuchte allgemeinste LAPLACEsche Kugelfunktion, weil sie, mit r^n multipliziert, ein homogenes Polynom n-ten Grades in x, y, z ist und die $2n+1$ Glieder, aus denen sie linear homogen zusammengesetzt ist, linear unabhängig sind.

Denn nach der Formel

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^m = \cos m\varphi + i\sin m\varphi$$

sind $\cos m\varphi$ und $\sin m\varphi$ homogene Polynome m-ten Grades in den Veränderlichen $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$; $r^m(A_m \cos m\varphi + B_m \sin m\varphi)\sin^m\vartheta$ ist daher nach (2·1) ein homogenes Polynom m-ten Grades in x und y. Der übrige Teil von $P_n^m(\cos\vartheta)$, nämlich $P_n^{(m)}(\cos\vartheta)$, ist nach Ziffer 18 ein Polynom $(n-m)$-ten Grades in $\cos\vartheta$, das nur gerade oder nur ungerade Potenzen von $\cos\vartheta$ enthält, $r^{n-m}P_n^{(m)}(\cos\vartheta)$ somit ein homogenes Polynom $(n-m)$-ten Grades in x, y, z. Damit ist der erste Teil der Behauptung bewiesen. Die Richtigkeit des zweiten Teiles erkennt man so: Aus $S_n(\vartheta, \varphi) = 0$ folgt gemäß (2), wenn wir mit $\cos k\varphi$ bzw. $\sin k\varphi$ multiplizieren und nach φ zwischen $-\pi$ und $+\pi$ integrieren:

$$A_k = B_k = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots, n).$$

Damit ist zugleich bewiesen, daß es genau $2n+1$ linear unabhängige ganze rationale räumliche Kugelfunktionen n-ten Grades gibt.

Die linear unabhängigen Bestandteile

$$\cos m\varphi\, P_n^m(\cos\vartheta) \quad \text{bzw.} \quad \sin m\varphi\, P_n^m(\cos\vartheta),$$

aus denen $S_n(\vartheta,\varphi)$ linear homogen zusammengesetzt ist, nennt man tesserale Kugelfunktionen. Eine solche Kugelfunktion verschwindet auf den $2m$ Meridianen $\varphi = \frac{\pi}{2m}, \frac{3\pi}{2m}, \frac{5\pi}{2m}, \ldots, \frac{(4m-1)\pi}{2m}$, bzw. $0, \frac{\pi}{m}, \frac{2\pi}{m}, \ldots, \frac{(2m-1)\pi}{m}$ und auf $n-m$ Parallelkreisen, entsprechend der Tatsache, daß $P_n^m(\cos\vartheta)$ $n-m$ verschiedene, spiegelbildlich zum Äquator $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ gelegene Nullstellen hat (vgl. Ziffer 18). In einem von zwei solchen, unmittelbar aufeinander folgenden Meridianen und Parallelkreisen begrenzten sphärischen Viereck hat die tesserale Kugelfunktion keine Nullstellen, behält somit dort ihr Vorzeichen, und daher stammt der Name. Für $m = 0$ erhält man die zonalen Kugelfunktionen. Es entfallen dabei die Faktoren $\sin^m\vartheta$ und $\cos m\varphi$ bzw. $\sin m\varphi$; das erwähnte Viereck wird zu einer Kugelzone. $P_n(\cos\vartheta)$ behält also sein Vorzeichen längs einer ganzen Kugelzone, woraus sich der Name zonal erklärt. Schließlich bezeichnet man die für $m = n$ auftretenden Funktionen, welche bis auf einen konstanten Faktor die Gestalt $\cos n\varphi \sin^n\vartheta$ bzw. $\sin n\varphi \sin^n\vartheta$ haben, als sektorielle Kugelfunktionen, weil sich bei ihnen das erwähnte Viereck auf einen Kugelsektor ausdehnt, in dem sie ihr Vorzeichen behalten.

48. Additionstheorem. P sei ein Punkt mit den rechtwinkligen Koordinaten (x, y, z) und den Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ), P' ein Punkt mit den rechtwinkligen Koordinaten (x', y', z') und den Kugelkoordinaten $(r', \vartheta', \varphi')$; dann gilt für den Winkel γ, den die beiden Vektoren $\overrightarrow{OP}$ und $\overrightarrow{OP'}$ miteinander einschließen (O Nullpunkt des Koordinatensystems),

$$\text{(1)} \qquad \cos\gamma = \frac{xx' + yy' + zz'}{rr'} = \cos\vartheta\cos\vartheta' + \sin\vartheta\sin\vartheta'\cos(\varphi - \varphi').$$

$P_n(\cos\gamma)$ ist ein Polynom n-ten Grades in $\cos\gamma$, das nur gerade oder nur ungerade Potenzen von $\cos\gamma$ enthält, somit ist $r^n P_n(\cos\gamma)$ ein homogenes Polynom n-ten Grades in x, y, z. Es genügt der LAPLACEschen Differentialgleichung, wenn die positive Z-Achse mit dem Vektor $\overrightarrow{OP'}$ zusammenfällt. Da $\Delta = \operatorname{grad}\operatorname{div}$ unabhängig vom Koordinatensystem definiert, also gegenüber Drehungen des Koordinatensystems invariant ist, genügt $r^n P_n(\cos\gamma)$ auch bei beliebiger Richtung der Z-Achse der LAPLACEschen

Differentialgleichung; ist hiernach als Funktion von x, y, z eine ganze rationale räumliche Kugelfunktion n-ten Grades, somit $P_n(\cos\gamma)$ als Funktion von ϑ, φ eine LAPLACEsche Kugelfunktion. Da die Koordinaten der beiden Punkte P und P' in $P_n(\cos\gamma)$ symmetrisch auftreten, ist $P_n(\cos\gamma)$ auch als Funktion von ϑ', φ' eine LAPLACEsche Kugelfunktion. Weil sie von den Richtungen (ϑ, φ) und (ϑ', φ') symmetrisch abhängt, bezeichnet man sie auch als zweiachsige Kugelfunktion, wozu im Gegensatz man die nur von ϑ abhängige zonale Kugelfunktion auch einachsige Kugelfunktion nennt.

Als Polynom n-ten Grades in $\cos\gamma$ ist $P_n(\cos\gamma)$ zufolge (1) auch ein Polynom n-ten Grades in $\cos(\varphi - \varphi')$. Denkt man sich die Potenzen von $\cos(\varphi - \varphi')$ durch die Kosinus der Vielfachen dieses Winkels nach der Formel $\cos\alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}$ ausgedrückt und berücksichtigt man, daß $P_n(\cos\gamma)$ die Winkel φ und φ' nur in der Verbindung $\cos(\varphi - \varphi')$ enthält, so kann man setzen

$$P_n(\cos\gamma) = \sum_{m=0}^{n} u_m(\vartheta, \vartheta') \cos m(\varphi - \varphi').$$

$u_m(\vartheta, \vartheta')$ muß ϑ und ϑ' symmetrisch enthalten und nach (47·2) sowohl von der Gestalt $c'_m(\vartheta') P_n^m(\cos\vartheta)$ als auch von der Gestalt $c_m(\vartheta) P_n^m(\cos\vartheta')$ sein. Es ist daher $u_m(\vartheta, \vartheta') = a_m P_n^m(\cos\vartheta) P_n^m(\cos\vartheta')$ mit festem a_m, also

$$(2) \qquad P_n(\cos\gamma) = \sum_{m=0}^{n} a_m P_n^m(\cos\vartheta) P_n^m(\cos\vartheta') \cos m(\varphi - \varphi').$$

Wir führen jetzt $\xi = \cos\vartheta$, $\xi' = \cos\vartheta'$ ein. Dann ist nach (1)

$$\cos\gamma = \xi\xi' + \sqrt{1-\xi^2}\,\sqrt{1-\xi'^2}\cos(\varphi - \varphi').$$

Beide Seiten der Gleichung (2) sind Polynome in $\xi, \xi', \sqrt{1-\xi^2}, \sqrt{1-\xi'^2}$. Um a_m zu bestimmen, dividieren wir Formel (2) durch $(\xi\xi')^n$ und gehen zur Grenze $\xi, \xi' \to +\infty$ über, wobei wir den Punkt $+1$ auf einem kleinen Halbkreis im negativen Sinn umlaufen. Da $P_n(\cos\gamma)$ ein Polynom n-ten Grades in $\cos\gamma$ ist, fallen bei diesem Grenzübergang sämtliche Glieder mit Ausnahme von $\cos^n\gamma$ weg. Weil

$$\lim_{\xi, \xi' \to +\infty} \frac{\cos\gamma}{\xi\xi'} = 1 - \cos(\varphi - \varphi')$$

ist, wird zufolge (13·3)

$$\lim_{\xi, \xi' \to +\infty} \frac{P_n(\cos\gamma)}{(\xi\xi')^n} = \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{n!}\left(2\sin^2\frac{\varphi - \varphi'}{2}\right)^n.$$

$P_n^m(\cos\vartheta)$ ist bis auf den Faktor $(1-\xi^2)^{\frac{m}{2}}$ ein Polynom $(n-m)$-ten Grades in ξ, daher bleibt auch hier beim Grenzübergang nur das erste

Glied übrig, und man erhält gemäß (18·2)

$$\lim_{\xi,\xi'\to+\infty} \frac{P_n^m(\cos\vartheta)\,P_n^m(\cos\vartheta')}{(\xi\,\xi')^n} = (-1)^m \left[\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{(n-m)!}\right]^2,$$

somit wird aus (2)

$$(3)\qquad \frac{2^n}{n!}\sin^{2n}\frac{\varphi-\varphi'}{2} = 1\cdot 3\cdots(2n-1)\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^m a_m \cos m(\varphi-\varphi')}{[(n-m)!]^2}.$$

Auf der linken Seite dieser Gleichung erhalten wir

$$\sin^{2n}\frac{\varphi-\varphi'}{2} = \left(\frac{e^{i\frac{\varphi-\varphi'}{2}} - e^{-i\frac{\varphi-\varphi'}{2}}}{2i}\right)^{2n}$$

$$= \frac{(-1)^n}{2^{2n}}\sum_{k=0}^{2n}\frac{(-1)^k(2n)!}{k!\,(2n-k)!}\,e^{(n-k)\,i\,(\varphi-\varphi')}$$

$$= \frac{1}{2^{2n}}\left[\frac{(2n)!}{(n!)^2} + 2\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^{n+k}(2n)!}{k!\,(2n-k)!}\cos(n-k)(\varphi-\varphi')\right]$$

$$= \frac{1}{2^{2n}}\left[\frac{(2n)!}{(n!)^2} + 2\sum_{m=1}^{n}\frac{(-1)^{n+k}(2n)!}{(n-m)!\,(n+m)!}\cos m(\varphi-\varphi')\right].$$

Setzt man diesen Ausdruck in (3) ein, so folgt

$$\frac{1}{2^n\,n!}\left[\frac{(2n)!}{(n!)^2} + 2\sum_{m=1}^{n}\frac{(-1)^m(2n)!}{(n-m)!\,(n+m)!}\cos m(\varphi-\varphi')\right]$$

$$= \frac{(2n)!}{2^n\,n!}\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^m a_m}{[(n-m)!]^2}\cos m(\varphi-\varphi')$$

oder

$$a_0 = 1,\quad a_m = 2\,\frac{(n-m)!}{(n+m)!},$$

also schließlich

$$(4)\qquad P_n(\cos\gamma) = P_n(\cos\vartheta)\,P_n(\cos\vartheta')$$

$$+\,2\sum_{m=1}^{n}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\,P_n^m(\cos\vartheta)\,P_n^m(\cos\vartheta')\cos m(\varphi-\varphi').$$

Diese Formel stammt von LEGENDRE (1782) und wird als **Additionstheorem** von $P_n(\cos\gamma)$ bezeichnet.

49. Integraleigenschaften. Aus (47·2) und (21·5) folgt

$$(1)\qquad \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} S_m(\vartheta,\varphi)\,S_n(\vartheta,\varphi)\sin\vartheta\,d\vartheta = 0 \quad \text{für}\quad m \neq n,$$

d. h. die LAPLACEschen **Kugelfunktionen sind orthogonale Funktionen auf der Einheitskugel.**

Ferner ergibt sich aus (48·1), (48·4), (47·2) und (21·5)

$$(2)\qquad \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{\pi} P_n(\cos\gamma)\, S_n(\vartheta', \varphi') \sin\vartheta'\, d\vartheta' = \frac{4\pi}{2n+1} S_n(\vartheta, \varphi).$$

Die zum Beweis der Gleichungen (1) und (2) notwendigen Rechnungen gestalten sich folgendermaßen: Man hat nach (47·2)

$$(3)\qquad S_m(\vartheta, \varphi) = \sum_{k=0}^{m} (A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi)\, P_m^k(\cos\vartheta),$$

$$(4)\qquad S_n(\vartheta, \varphi) = \sum_{k=0}^{n} (A'_k \cos k\varphi + B'_k \sin k\varphi)\, P_n^k(\cos\vartheta).$$

Jedes Glied von (3) ist mit jedem Glied von (4) zu multiplizieren und hierauf über die Oberfläche der Einheitskugel zu integrieren. Produkte, in denen Glieder mit verschiedenen Zeigern k multipliziert sind, geben bei der Integration Null zufolge der Orthogonalitätsbeziehungen der Kreisfunktionen

$$(5)\qquad \int_0^{2\pi} {\cos \atop \sin} k\varphi {\cos \atop \sin} k'\varphi\, d\varphi = 0 \quad \text{für} \quad k \neq k' \quad \text{und} \quad \int_0^{2\pi} \cos k\varphi \sin k'\varphi\, d\varphi = 0\,.$$

Produkte, in denen Glieder mit gleichen Zeigern k multipliziert sind, geben Null zufolge der Orthogonalitätsrelationen (21·5) der Legendreschen Funktionen, weil $m \neq n$ ist.

Führt man an Stelle von $S_m(\vartheta, \varphi)$ aus (48·4) $P_n(\cos\gamma)$ ein und löst man dabei $\cos m(\varphi - \varphi')$ nach dem Additionstheorem des Kosinus auf, so bleiben nach gliedweiser Multiplikation mit (47·2) und nachfolgender Integration gemäß (2) wegen (5) nur diejenigen Produkte übrig, in welchen Glieder mit gleichen Zeigern m multipliziert sind. Aus

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 m\varphi\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \sin^2 m\varphi\, d\varphi = \pi$$

und (21·5) ergibt sich dann die Richtigkeit der Formel (2).

50. Entwicklung von Hobson. Im folgenden brauchen wir eine von Hobson[1]) stammende Entwicklung, die wir jetzt herleiten wollen. $F(u)$ soll eine n-malig differenzierbare Funktion einer Veränderlichen u bedeuten. Wir betrachten den Ausdruck

$$(1)\qquad V = \sum_{\alpha+\beta+\gamma=n} a_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial^n F(u)}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma}$$

---

[1]) E. W. Hobson, Messenger of Mathematics 23 (1894) 115.

mit irgendwelchen konstanten Koeffizienten $a_{\alpha\beta\gamma}$; für u denken wir uns eine Funktion $f(x, y, z)$ eingesetzt, die Ableitungen bis zur n-ten Ordnung haben möge. Man überlegt sich, daß V von der Gestalt

$$V = \sum_{k=1}^{n} \chi_k F^{(k)}(u)$$

ist, wobei die Koeffizienten Funktionen von x, y, z sind, die nicht von der Wahl der Funktion $F(u)$, wohl aber von der Wahl der Funktion $f(x, y, z)$ abhängen.

Wenn wir also die χ_k bestimmen wollen, können wir für $F(u)$ eine besondere Funktion z. B. $F(u) = u^n$ setzen. In diesem Falle wird

$$(2)\qquad V = n! \sum_{k=1}^{n} \frac{\chi_k}{(n-k)!} [f(x, y, z)]^{n-k}.$$

Wir haben somit (1) nach Potenzen von $f(x, y, z)$ zu entwickeln. Wir beachten zu diesem Zweck, daß

$$(3)\qquad \frac{\partial^n [f(x, y, z)]^n}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma} = \left\{\frac{\partial^n [f(x+\xi, y+\eta, z+\zeta)]^n}{\partial \xi^\alpha \partial \eta^\beta \partial \zeta^\gamma}\right\}_{\xi=\eta=\zeta=0}$$

ist und daß sich nach dem binomischen Satz

$$[f(x+\xi, y+\eta, z+\zeta)]^n = \{[f(x+\xi, y+\eta, z+\zeta) - f(x, y, z)] + f(x, y, z)\}^n$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} [f(x+\xi, y+\eta, z+\zeta) - f(x, y, z)]^k [f(x, y, z)]^{n-k},$$

infolgedessen aus (1), (2) und (3)

$$(4)\qquad \chi_k = \frac{1}{k!} \sum_{\alpha+\beta+\gamma=n} a_{\alpha\beta\gamma} \left\{\frac{\partial^n [f(x+\xi, y+\eta, z+\zeta) - f(x, y, z)]^k}{\partial \xi^\alpha \partial \eta^\beta \partial \zeta^\gamma}\right\}_{\xi=\eta=\zeta=0}$$

ergibt.

Ist insbesondere $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, so kann man die Rechnung weiterführen. Es ist dann

$$[f(x+\xi, y+\eta, z+\zeta) - f(x, y, z)]^k = [2(x\xi + y\eta + z\zeta) + (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)]^k$$
$$= \sum_{\lambda=0}^{k} \frac{k!\,2^{k-\lambda}}{\lambda!\,(k-\lambda)!} (x\xi + y\eta + z\zeta)^{k-\lambda} (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^\lambda.$$

Die Entwicklung von $(x\xi + y\eta + z\zeta)^{k-\lambda}$ liefert in jedem Glied $k - \lambda$ für die Summe der Exponenten von ξ, η, ζ, die von $(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^\lambda$ dagegen 2λ; im Produkt beider Reihenentwicklungen erhalten wir daher die Exponentensumme $k + \lambda$. Da aber der Operator $\frac{\partial^n}{\partial \xi^\alpha \partial \eta^\beta \partial z^\gamma}$ auf jedes dieser Glieder auszuüben und hernach $\xi = \eta = \zeta = 0$ zu setzen ist, bleiben nur Glieder übrig, für die $k + \lambda = n$, d. h. $\lambda = n - k$ ist. Man hat also

gemäß (4)

$$(5)\quad \chi_k = \frac{2^{2k-n}}{(n-k)!\,(2k-n)!} \sum_{\alpha+\beta+\gamma=n} a_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial^n[(x\xi+y\eta+z\zeta)^{2k-n}(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^{n-k}]}{\partial\xi^\alpha\,\partial\eta^\beta\,\partial\zeta^\gamma}.$$

Nun ist, wenn die Koeffizienten $b_{\alpha\beta\gamma}$ von ξ, η, ζ nicht abhängen,

$$(6)\quad \sum_{\alpha+\beta+\gamma=n} a_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial^n}{\partial\xi^\alpha\,\partial\eta^\beta\,\partial\zeta^\gamma} \sum_{\lambda+\mu+\nu=n} b_{\lambda\mu\nu}\,\xi^\lambda\eta^\mu\zeta^\nu = \sum_{\alpha+\beta+\gamma=n} a_{\alpha\beta\gamma}\,\alpha!\,\beta!\,\gamma!\,b_{\alpha\beta\gamma}$$
$$= \sum_{\alpha+\beta+\gamma=n} b_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial^n}{\partial\xi^\alpha\,\partial\eta^\beta\,\partial\zeta^\gamma} \sum_{\lambda+\mu+\nu=n} a_{\lambda\mu\nu}\,\xi^\lambda\eta^\mu\zeta^\nu.$$

Wenden wir diese Formel mit

$$\sum_{\lambda+\mu+\nu=n} b_{\lambda\mu\nu}\,\xi^\lambda\eta^\mu\zeta^\nu = (x\xi+y\eta+z\zeta)^{2k-n}(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^{n-k}$$

auf (5) an, so folgt, weil dann der Operator

$$\sum_{\alpha+\beta+\gamma=n} b_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial^n}{\partial\xi^\alpha\,\partial\eta^\beta\,\partial\zeta^\gamma} = \left(x\frac{\partial}{\partial\xi}+y\frac{\partial}{\partial\eta}+z\frac{\partial}{\partial\zeta}\right)^{2k-n}\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}\right)^{n-k}$$

ist,

$$(7)\quad \chi_k = \frac{2^{2k-n}}{(n-k)!\,(2k-n)!}\left(x\frac{\partial}{\partial\xi}+y\frac{\partial}{\partial\eta}+z\frac{\partial}{\partial\zeta}\right)^{2k-n}\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}\right)^{n-k} \sum_{\alpha+\beta+\gamma=n} a_{\alpha\beta\gamma}\,\xi^\alpha\eta^\beta\zeta^\gamma.$$

$$(8)\quad G_{2k-n}(\xi,\eta,\zeta) = \left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}\right)^{n-k} \sum_{\alpha+\beta+\gamma=n} a_{\alpha\beta\gamma}\,\xi^\alpha\eta^\beta\zeta^\gamma$$

ist ein homogenes Polynom vom Grade $2k-n$. Übt man daher noch den Operator $\left(x\frac{\partial}{\partial\xi}+y\frac{\partial}{\partial\eta}+z\frac{\partial}{\partial\zeta}\right)^{2k-n}$ auf $G_{2k-n}(\xi,\eta,\zeta)$ aus, so erhält man nach dem polynomischen Satz ähnlich wie bei (6)

$$\left(x\frac{\partial}{\partial\xi}+y\frac{\partial}{\partial\eta}+z\frac{\partial}{\partial\zeta}\right)^{2k-n} G_{2k-n}(\xi,\eta,\zeta)$$
$$= \sum_{\lambda+\mu+\nu=2k-n} \frac{(2k-n)!}{\lambda!\,\mu!\,\nu!}\,x^\lambda y^\mu z^\nu \frac{\partial^{2k-n}G_{2k-n}(\xi,\eta,\zeta)}{\partial\xi^\lambda\,\partial\eta^\mu\,\partial\zeta^\nu} = (2k-n)!\,G_{2k-n}(x,y,z)$$
$$= (2k-n)!\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)^{n-k} \sum_{\alpha+\beta+\gamma=n} a_{\alpha\beta\gamma}\,x^\alpha y^\beta z^\gamma$$

gemäß (8), also schließlich nach (7)

$$\chi_k = \frac{2^{2k-n}}{(n-k)!}\,\Delta^{n-k}\left(\sum_{\alpha+\beta+\gamma=n} a_{\alpha\beta\gamma}\,x^\alpha y^\beta z^\gamma\right)$$

und nach (1), wenn $u = x^2+y^2+z^2$ ist,

$$(9)\quad \sum_{\alpha+\beta+\gamma=n} a_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial^n F(u)}{\partial x^\alpha\,\partial y^\beta\,\partial z^\gamma} = \sum_{k=1}^{n} \frac{2^{2k-n}}{(n-k)!} F^{(k)}(u)\,\Delta^{n-k}\left(\sum_{\alpha+\beta+\gamma=n} a_{\alpha\beta\gamma}\,x^\alpha y^\beta z^\gamma\right).$$

Wählen wir insbesondere $F(u) = \frac{1}{r} = u^{-\frac{1}{2}}$, so ist

$$F^{(k)}(u) = \frac{d^k\left(u^{-\frac{1}{2}}\right)}{du^k} = (-1)^k \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}{2^k} u^{-\frac{2k+1}{2}}$$
$$= (-1)^k \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}{2^k r^{2k+1}},$$

daher nach (9)

$$(10)\quad \sum_{\alpha+\beta+\gamma=n} a_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial^n \frac{1}{r}}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma} = \frac{(-1)^n 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{r^{2n+1}}$$
$$\times\left[1+\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k r^{2k} \Delta^k}{2^k k!\,(2n-1)(2n-3)\cdots(2n-2k+1)}\right] \sum_{\alpha+\beta+\gamma=n} a_{\alpha\beta\gamma} x^\alpha y^\beta z^\gamma.$$

Ist $U_n = \sum\limits_{\alpha+\beta+\gamma=n} a_{\alpha\beta\gamma} x^\alpha y^\beta z^\gamma$ Kugelfunktion, so verschwindet $\Delta^k U_n$, somit ist gemäß (10)

$$(11)\quad U_n = \sum_{\alpha+\beta+\gamma=n} a_{\alpha\beta\gamma} x^\alpha y^\beta z^\gamma$$
$$= \frac{(-1)^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)} \sum_{\alpha+\beta+\gamma=n} a_{\alpha\beta\gamma} r^{2n+1} \frac{\partial^n \frac{1}{r}}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma}.$$

Daraus können wir schließen, daß

$$(12)\quad r^{2n+1} \frac{\partial^n \frac{1}{r}}{\partial y^k \partial z^{n-k}} \; (0 \leqq k \leqq n),\quad r^{2n+1} \frac{\partial^n \frac{1}{r}}{\partial x\, \partial y^k \partial z^{n-k-1}} \; (0 \leqq k \leqq n-1)$$

$2n+1$ linear unabhängige ganze rationale räumliche Kugelfunktionen n-ten Grades sind. Es ist nämlich $\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2}$ gemäß Ziffer 6; folglich lassen sich alle Ableitungen n-ter Ordnung von $\frac{1}{r}$, in denen mehr als einmal nach x differenziert wird, durch die übrigen linear homogen mit konstanten Koeffizienten darstellen, daher nach (11) ebenso alle ganzen rationalen räumlichen Kugelfunktionen n-ten Grades durch die Funktionen (12). Diese sind gemäß Ziffer 6 ebensolche Kugelfunktionen und außerdem linear unabhängig, weil es nach Ziffer 47 genau $2n+1$ linear unabhängige derartige Kugelfunktionen gibt.

51. Pole der Kugelfunktionen. Wir betrachten eine Kugel vom Halbmesser r; ihr Mittelpunkt möge mit dem Nullpunkt des Koordinatensystems zusammenfallen. Einen durch den Mittelpunkt gehenden Halbstrahl mit den Richtungskosinus (a, b, c) wollen wir eine Achse nennen, ihren Schnittpunkt mit der Kugeloberfläche den Pol der Achse. Wenn

wir eine Funktion $f(x, y, z)$ nach der Richtung der Achse differenzieren, so haben wir den Operator $a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}+c\frac{\partial}{\partial z}$ auf die Funktion auszuüben. Haben wir mehrere solcher Achsen und ihre Operatoren

$$\frac{\partial}{\partial h_\nu}=a_\nu\frac{\partial}{\partial x}+b_\nu\frac{\partial}{\partial y}+c_\nu\frac{\partial}{\partial z}\qquad(\nu=1,2,\ldots,n),$$

so können wir die Funktion $f(x, y, z)$ nach ihnen hintereinander differenzieren oder $\frac{\partial^n f}{\partial h_1\partial h_2\cdots\partial h_n}$ bilden. Wählen wir $f(x, y, z)=\frac{1}{r}$, so wollen wir $\frac{\partial^n\frac{1}{r}}{\partial h_1\partial h_2\cdots\partial h_n}$ einen Multipol mit den Achsen $h_1, h_2, \ldots, h_n$ nennen.

Der Name stammt daher, daß z. B. $\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial h}$ das Potential eines Dipols ist, dessen Achse die Richtung h hat, vgl. (III, 28).

Gemäß Ziffer 6 ist

$$V_n=r^{2n+1}\frac{\partial^n\frac{1}{r}}{\partial h_1\partial h_2\cdots\partial h_n}=r^{2n+1}\prod_{\nu=1}^{n}\left(a_\nu\frac{\partial}{\partial x}+b_\nu\frac{\partial}{\partial y}+c_\nu\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{1}{r}$$

eine ganze rationale räumliche Kugelfunktion n-ten Grades. Wenden wir Formel (10) der vorigen Ziffer auf V_n an, so erhalten wir

$$V_n=(-1)^n\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)$$
$$\times\left[1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^k r^{2k}\Delta^k}{2^k k!(2n-1)(2n-3)\cdots(2n-2k+1)}\right]\prod_{\nu=1}^{n}(a_\nu x+b_\nu y+c_\nu z)$$

zur einfachen Berechnung des Multipols.

Man kann jede ganze rationale räumliche Kugelfunktion als Multipol darstellen. Nach (50·11) läßt sich nämlich jede solche Kugelfunktion n-ten Grades $U_n=\sum\limits_{\alpha+\beta+\gamma=n}a_{\alpha\beta\gamma}x^\alpha y^\beta z^\gamma$ in der Gestalt

(1) $$U_n(x, y, z)=\frac{(-1)^n r^{2n+1}}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}U_n\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{1}{r}$$

darstellen. Wenn wir also U_n in der Gestalt

(2) $$U_n(x, y, z)=C\prod_{\nu=1}^{n}(a_\nu x+b_\nu y+c_\nu z)+(x^2+y^2+z^2)H_{n-2}(x, y, z)$$

schreiben können, wobei $H_{n-2}(x, y, z)$ ein beliebiges homogenes Polynom $(n-2)$-ten Grades ist, so folgt aus (1)

(3) $$U_n(x, y, z)=\frac{(-1)^n r^{2n+1}}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}C\prod_{\nu=1}^{n}\left(a_\nu\frac{\partial}{\partial x}+b_\nu\frac{\partial}{\partial y}+c_\nu\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{1}{r},$$

weil
$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)H_{n-2}\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{1}{r}=0$$
gemäß Ziffer 6 ist, womit die Darstellung als Multipol geleistet ist.

Um (2) zu erhalten, gehen wir in folgender Weise vor: Wir deuten x, y, z als homogene Punktkoordinaten in der Ebene. Dann ist $U_n(x, y, z) = 0$ die Gleichung einer Kurve n-ter Ordnung C_n, $a_\nu x + b_\nu y + c_\nu z = 0$ die Gleichung einer geraden Linie h_ν, $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ die Gleichung eines nullteiligen Kegelschnittes C_2, $H_{n-2}(x, y, z) = 0$ die Gleichung einer Kurve $(n - 2)$-ter Ordnung C_{n-2}. Wie sich aus (2) ergibt, schneidet der Kegelschnitt C_2 die Kurve C_n gerade in den $2n$ Punkten, in denen der Kegelschnitt von den n Geraden h_ν getroffen wird. Sie sind paarweise konjugiert imaginär. Die durch ein solches Paar gehende Gerade ist daher reell. Wir erhalten auf diese Weise n reelle Gerade durch die $2n$ Schnittpunkte, also genau die Geraden h_ν. Hätten wir einen der Schnittpunkte mit einem anderen verbunden, der nicht zu ihm konjugiert ist, so wäre die Gerade ebenfalls imaginär. Die Aufgabe läßt sich also im Reellen nur auf eine Art lösen.

Um die Schnittpunkte zu bestimmen, setze man

$$(4) \qquad x = u^2 - v^2, \quad y = 2uv, \quad z = i(u^2 + v^2).$$

Dieser Ansatz befriedigt die Kegelschnittsgleichung. Führt man ihn in die Gleichung der Kurve C_n ein, so ergibt sich eine Gleichung vom Grade $2n$ für das Verhältnis $u:v$. Setzt man deren Lösungen in (4) ein, so erhält man die homogenen Punktkoordinaten der $2n$ Schnittpunkte. Mehrfache Lösungen liefern entsprechend oft zu zählende Schnittpunkte. Durch die Schnittpunkte sind gemäß den durchgeführten Überlegungen auch die Geraden h_ν und damit die Zahlen a_ν, b_ν, c_ν bestimmt und leicht zu berechnen.

Wir haben nun noch C so zu bestimmen, daß Gleichung (2) erfüllt ist. Wir führen die Abkürzung $L_\nu = a_\nu x + b_\nu y + c_\nu z$ ein und betrachten das Büschel von Kurven n-ter Ordnung, das durch die Gleichung
$$U_n - \lambda L_1 L_2 \cdots L_n = 0$$
gegeben ist. Jede Kurve des Büschels geht durch die $2n$ Schnittpunkte, wie sich aus der Gleichung sofort ergibt. Wir wählen nun auf dem Kegelschnitt C_2 einen beliebigen, von den Schnittpunkten verschiedenen Punkt und bestimmen λ so, daß die entsprechende Kurve des Büschels durch diesen Punkt geht. Das ist möglich, da für diesen Punkt keines der L_ν verschwindet. Die Kurve des Büschels, die zu diesem λ gehört, hat mit dem Kegelschnitt C_2 $2n + 1$ Punkte gemeinsam, enthält ihn daher ganz,

d. h. sie zerfällt in C_2 und eine Kurve $(n-2)$-ten Grades C_{n-2}. Die linke Seite ihrer Gleichung $U_n - \lambda L_1 L_2 \cdots L_n$ muß also von der Gestalt $(x^2+y^2+z^2)\,H_{n-2}$ sein. Unser so bestimmtes λ ist somit das gesuchte C. (2) ist eine identische Gleichung, in der alle übrigen Koeffizienten reell sind. Setzt man demnach für die x, y, z reelle Zahlen ein, für die keines der L_ν verschwindet, so ergibt sich C reell.

Der Gedanke, die Kugelfunktionen durch die Lage ihrer Pole festzulegen, geht auf GAUSS[1]) zurück, wurde dann von MAXWELL[2]) entwickelt und von CLEBSCH[3]) und SYLVESTER[4]) fortgeführt.

52. Pole der tesseralen Kugelfunktionen. Wir wollen jetzt annehmen, $n-m$ der Achsen des Multipols sollen mit der positiven Z-Achse zusammenfallen und die übrigen m so in der XY-Ebene verteilt sein, daß je zwei aufeinanderfolgende den Winkel $\frac{\pi}{m}$ einschließen $(1 \leqq m \leqq n)$. α sei der Winkel, den eine dieser Achsen mit der X-Achse einschließt. Wir setzen

$$\xi = x + iy, \quad \eta = x - iy,$$

also

$$x = \frac{\xi+\eta}{2}, \quad y = \frac{\xi-\eta}{2i},$$

daher

$$\text{(1)} \qquad \frac{\partial}{\partial\xi} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial\eta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

und bilden

$$\text{(2)} \qquad \prod_{\nu=0}^{m-1}\left[\cos\left(\alpha+\frac{\nu\pi}{m}\right)\frac{\partial}{\partial x} + \sin\left(\alpha+\frac{\nu\pi}{m}\right)\frac{\partial}{\partial y}\right]$$

$$= \frac{1}{2^m}\prod_{\nu=0}^{m-1}\left[e^{i\left(\alpha+\frac{\nu\pi}{m}\right)}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) + e^{-i\left(\alpha+\frac{\nu\pi}{m}\right)}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)\right]$$

$$= \prod_{\nu=0}^{m-1}\left[e^{i\left(\alpha+\frac{\nu\pi}{m}\right)}\frac{\partial}{\partial\xi} + e^{-i\left(\alpha+\frac{\nu\pi}{m}\right)}\frac{\partial}{\partial\eta}\right]$$

$$= e^{(m-1)\frac{i\pi}{2}}\left[e^{mi\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^m - e^{-mi\alpha}\left(-\frac{\partial}{\partial\eta}\right)^m\right].$$

---

1) C. F. GAUSS, Werke Bd. 5, S. 631.

2) J. CL. MAXWELL, A Treatise on Electricity and Magnetism, Bd. 1, 2. Aufl., S. 179—214, Oxford 1881.

3) A. CLEBSCH, J. reine angew. Math. 60 (1862) 343.

4) J. J. SYLVESTER, Philos. Mag. London, Serie 5, Bd. 2 (1876), S. 291—307 und 400 oder Werke Bd. 3, S. 37—51, Cambridge 1909. Vgl. auch A. OSTROWSKI, Jber. Deutsche Math. Verein. Bd. 33 (1924).

Es ist nämlich

$$\prod_{\nu=0}^{m-1}\left[e^{i\left(\alpha+\frac{\nu\pi}{m}\right)}u+e^{-i\left(\alpha+\frac{\nu\pi}{m}\right)}v\right]=\prod_{\nu=0}^{m-1}e^{-i\alpha}(-v)e^{\frac{i\nu\pi}{m}}\left[\left(-e^{2i\alpha}\frac{u}{v}\right)-e^{-\frac{2i\nu\pi}{m}}\right]$$

$$=(-v)^m e^{-mi\alpha}e^{\frac{i\pi}{2}(m-1)}\left[\left(-e^{2i\alpha}\frac{u}{v}\right)^m-1\right]$$

$$=e^{\frac{i\pi}{2}(m-1)}\left[e^{mi\alpha}u^m-e^{-mi\alpha}(-v)^m\right].$$

$e^{-\frac{2i\nu\pi}{m}}$ $(\nu=0, 1, 2, \ldots, m-1)$ sind ja die m-ten Einheitswurzeln, weswegen $w^m-1=\prod_{\nu=0}^{m-1}\left(w-e^{-\frac{2i\nu\pi}{m}}\right)$ ist.

Nun ergibt sich aus (50·10), weil $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(x\pm iy)^m=0$ ist,

$$\frac{\partial^{n-m}}{\partial z^{n-m}}\left(\frac{\partial}{\partial x}\pm i\frac{\partial}{\partial y}\right)^m\frac{1}{r}=\frac{(-1)^n 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{r^{2n+1}}\left[1-\frac{r^2\Delta}{2(2n-1)}\right.$$

$$\left.+\frac{r^4\Delta^2}{2\cdot 4\cdot(2n-1)(2n-3)}-\cdots\right]z^{n-m}(x\pm iy)^m$$

$$=\frac{(-1)^n 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{r^{2n+1}}(x\pm iy)^m\left[z^{n-m}-\frac{r^2}{2(2n-1)}\frac{d^2z^{n-m}}{dz^2}\right.$$

$$\left.+\frac{r^4}{2\cdot 4\cdot(2n-1)(2n-3)}\frac{d^4z^{n-m}}{dz^4}-\cdots\right]$$

$$=\frac{(-1)^n 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{r^{2n+1}}(x\pm iy)^m\left[z^{n-m}-\frac{(n-m)(n-m-1)}{2(2n-1)}z^{n-m-2}r^2\right.$$

$$\left.+\frac{(n-m)(n-m-1)(n-m-2)(n-m-3)}{2\cdot 4\cdot(2n-1)(2n-3)}z^{n-m-4}r^4-\cdots\right]$$

$$=\frac{(-1)^n 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{r^{n+1}}(\cos m\varphi\pm i\sin m\varphi)\sin^m\vartheta\left[\cos^{n-m}\vartheta\right.$$

$$\left.-\frac{(n-m)(n-m-1)}{2(2n-1)}\cos^{n-m-2}\vartheta+\cdots\right]$$

$$=\frac{(-1)^{m+n}}{r^{n+1}}(n-m)!\,(\cos m\varphi\pm i\sin m\varphi)\,P_n^m(\cos\vartheta)$$

nach (18·2) und (13·3).

Mit Rücksicht auf (1) folgt also

$$(3)\quad\begin{cases}\dfrac{\partial^{n-m}}{\partial z^{n-m}}\left[\left(\dfrac{\partial}{\partial\xi}\right)^m+\left(\dfrac{\partial}{\partial\eta}\right)^m\right]\dfrac{1}{r}=\dfrac{(-1)^{m+n}(n-m)!}{2^{m-1}r^{n+1}}\cos m\varphi\,P_n^m(\cos\vartheta),\\[2ex] i\dfrac{\partial^{n-m}}{\partial z^{n-m}}\left[\left(\dfrac{\partial}{\partial\xi}\right)^m-\left(\dfrac{\partial}{\partial\eta}\right)^m\right]\dfrac{1}{r}=\dfrac{(-1)^{m+n}(n-m)!}{2^{m-1}r^{n+1}}\sin m\varphi\,P_n^m(\cos\vartheta).\end{cases}$$

Nun erhält man aber die Operatoren $\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^m \pm \left(\frac{\partial}{\partial\eta}\right)^m$ aus (2) bis auf einen konstanten Faktor in folgender Weise: (2) liefert für $\alpha = 0$

$$\text{(I)} \qquad \left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^m - (-1)^m \left(\frac{\partial}{\partial\eta}\right)^m,$$

dagegen für $\alpha = \frac{\pi}{2m}$

$$\text{(II)} \qquad \left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^m + (-1)^m \left(\frac{\partial}{\partial\eta}\right)^m,$$

d. h. wir erhalten $\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^m + \left(\frac{\partial}{\partial\eta}\right)^m$ für gerades m aus II und für ungerades aus I, dagegen $\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^m - \left(\frac{\partial}{\partial\eta}\right)^m$ für gerades m aus I und für ungerades aus II. Damit haben wir die tesseralen Kugelfunktionen durch unsere Multipole dargestellt, die zonalen und sektoriellen sind besondere Fälle. Bei den zonalen fallen alle Achsen in die Z-Achse, bei den sektoriellen alle in die XY-Ebene. Diese erhält man aus (3) für $m = n$, jene ($m = 0$) aber aus (9·2), da in den Formeln der vorliegenden Ziffer $m \geqq 1$ vorausgesetzt wurde.

§ 7. Reihenentwicklungen nach Laplaceschen Kugelfunktionen.

53. Reihenentwicklungen nach Laplaceschen Kugelfunktionen. $f(\vartheta, \varphi)$ sei eine auf der Einheitskugel definierte reelle Funktion. Wir setzen an

$$\text{(1)} \qquad f(\vartheta, \varphi) = \sum_{\nu=0}^{\infty} S_\nu(\vartheta, \varphi)$$

und nehmen an, daß diese Reihe gleichmäßig konvergiert. Wir multiplizieren die Gleichung mit $P_n(\cos\gamma)$ und integrieren über die Kugeloberfläche. Dann ergibt sich nach Ziffer 48 und 49

$$\text{(2)} \qquad S_n(\vartheta, \varphi) = \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{\pi} f(\vartheta', \varphi') P_n(\cos\gamma) \sin\vartheta' \, d\vartheta'$$

und daher aus (47·2), (48·4) für die Koeffizienten von $S_n(\vartheta, \varphi)$

$$\text{(3)} \qquad \begin{cases} A_{n0} = \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{\pi} f(\vartheta', \varphi') P_n(\cos\vartheta') \sin\vartheta' \, d\vartheta' \\ A_{nm} = \frac{2n+1}{2\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_0^{2\pi} \cos m\varphi' \, d\varphi' \int_0^{\pi} f(\vartheta', \varphi') P_n^m(\cos\vartheta') \sin\vartheta' d\vartheta' \\ B_{nm} = \frac{2n+1}{2\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_0^{2\pi} \sin m\varphi' \, d\varphi' \int_0^{\pi} f(\vartheta', \varphi') P_n^m(\cos\vartheta') \sin\vartheta' d\vartheta' \\ \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots; \quad m = 1, 2, \ldots, n). \end{cases}$$

Damit sind die einzelnen Glieder der Entwicklung bestimmt; sie ist also eindeutig.

Wir wollen nun die Entwicklung (1) auf ihre Konvergenz untersuchen, d. h. wir wollen hinreichende Bedingungen dafür aufstellen, daß sich $f(\vartheta, \varphi)$ in eine solche Reihe entwickeln läßt. Wir haben nach (2) die Reihe

$$\frac{1}{4\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} (2\nu + 1) \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{\pi} f(\vartheta', \varphi')\, P_\nu(\cos\gamma) \sin\vartheta'\, d\vartheta'$$

zu untersuchen. Wir führen an Stelle der Koordinaten ϑ', φ' andere Koordinaten auf der Kugel ein, indem wir den Pol des Systems ϑ', φ' in den Punkt mit den alten Koordinaten (ϑ, φ) verlegen. Dann tritt an Stelle des Winkels ϑ' der Winkel γ und an Stelle von φ' ein anderer Winkel $\bar{\varphi}$, der die einzelnen durch den neuen Pol gehenden Meridiane kennzeichnet. Dadurch wird $f(\vartheta', \varphi') = F(\gamma, \bar{\varphi})$. Schreiben wir noch zur Abkürzung $\Phi(\gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\gamma, \bar{\varphi})\, d\bar{\varphi}$, so erhalten wir, da die Integration über die ganze Kugel zu erstrecken ist,

$$(4) \qquad \frac{1}{4\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} (2\nu + 1) \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(\vartheta', \varphi')\, P_\nu(\cos\gamma) \sin\vartheta'\, d\vartheta'\, d\varphi'$$

$$= \frac{1}{4\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} (2\nu + 1) \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} F(\gamma, \bar{\varphi})\, P_\nu(\cos\gamma) \sin\gamma\, d\gamma\, d\bar{\varphi}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\nu + \frac{1}{2}\right) \int_0^{\pi} \Phi(\gamma)\, P_\nu(\cos\gamma) \sin\gamma\, d\gamma$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\nu + \frac{1}{2}\right) \int_{-1}^{+1} \Psi(u)\, P_\nu(u)\, du,$$

wenn wir noch $u = \cos\gamma$ setzen, wodurch $\Phi(\gamma) = \Psi(u)$ wird. Mit Hilfe der Rekursionsformel (12·5) erhalten wir

$$\sum_{\nu=0}^{n} \left(\nu + \frac{1}{2}\right) P_\nu(u) = \frac{1}{2}\left[P_n'(u) + P_{n+1}'(u)\right];$$

wir haben daher

$$(5) \qquad s_n = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \Psi(u)\, [P_n'(u) + P_{n+1}'(u)]\, du$$

für $n \to +\infty$ zu untersuchen.

54. Grenzwert der Teilsummen. Es sei

$$(1) \qquad \Psi(u) = \Psi_1(u) - \Psi_2(u),$$

wobei die Funktionen $\Psi_1(u)$ und $\Psi_2(u)$ abteilungsweise stetig und monoton sein sollen, und zwar so, daß an den Unstetigkeitsstellen die links- und

rechtsseitigen Grenzwerte vorhanden sind. Dann können wir die positive Zahl ε so wählen, daß beide Funktionen in den Intervallen $-1 < u < -1 + \varepsilon$ und $1 - \varepsilon < u < 1$ stetig und monoton sind und sich gleichzeitig ihre Grenzwerte an den Endpunkten dieser Intervalle beliebig wenig voneinander unterscheiden, also z. B.

$$\lim_{h \to 0} \Psi_1(-1 + h) \quad \text{von} \quad \lim_{h \to 0} \Psi_1(-1 + \varepsilon - h)$$

mit $h > 0$ und ähnlich bei $\Psi_2(u)$ und im anderen Intervall.

Nach dem zweiten Mittelwertsatz der Integralrechnung erhält man wie in Ziffer 28 mit $-1 \leqq \zeta_1 \leqq -1 + \varepsilon$, wenn man noch (10·4) berücksichtigt,

$$\begin{aligned} (2) \quad & \int_{-1}^{-1+\varepsilon} \Psi_1(u)\,[P_n'(u) + P_{n+1}'(u)]\,du \\ &= \lim_{h \to 0} \Psi_1(-1 + h) \int_{-1}^{\zeta_1} [P_n'(u) + P_{n+1}'(u)]\,du \\ &+ \lim_{h \to 0} \Psi_1(-1 + \varepsilon - h) \int_{\zeta_1}^{-1+\varepsilon} [P_n'(u) + P_{n+1}'(u)]\,du \\ &= [P_n(\zeta_1) + P_{n+1}(\zeta_1)]\,[\lim_{h \to 0} \Psi_1(-1 + h) - \lim_{h \to 0} \Psi_1(-1 + \varepsilon - h)] \\ &+ [P_n(-1 + \varepsilon) + P_{n+1}(-1 + \varepsilon)] \lim_{h \to 0} \Psi_1(-1 + \varepsilon - h). \end{aligned}$$

Der Betrag des ersten Summanden im letzten Ausdruck kann mit Rücksicht auf (11·2) nach der eben gemachten Bemerkung durch Wahl von ε beliebig klein gemacht werden, der des zweiten nach Wahl von ε gemäß (24·3) durch hinreichend große Wahl von n, weil $\Psi_1(u)$ beschränkt ist. Ähnliches gilt für $\Psi_2(u)$ und daher auch für $\Psi(u)$.

Ebenso ergibt sich mit $1 - \varepsilon \leqq \zeta_2 \leqq 1$, wenn wir (10·3) berücksichtigen,

$$\begin{aligned} (3) \quad & \int_{1-\varepsilon}^{1} \Psi_1(u)\,[P_n'(u) + P_{n+1}'(u)]\,du \\ &= \lim_{h \to 0} \Psi_1(1 - \varepsilon + h) \int_{1-\varepsilon}^{\zeta_2} [P_n'(u) + P_{n+1}'(u)]\,du \\ &+ \lim_{h \to 0} \Psi_1(1 - h) \int_{\zeta_2}^{1} [P_n'(u) + P_{n+1}'(u)]\,du \\ &= 2 \lim_{h \to 0} \Psi_1(1 - h) + [P_n(\zeta_2) + P_{n+1}(\zeta_2)]\,[\lim_{h \to 0} \Psi_1(1 - \varepsilon + h) \\ &- \lim_{h \to 0} \Psi_1(1 - h)] - [P_n(1 - \varepsilon) + P_{n+1}(1 - \varepsilon)] \lim_{h \to 0} \Psi_1(1 - \varepsilon + h). \end{aligned}$$

Aus ähnlichen Gründen wie früher können hier die Beträge des zweiten und dritten Summanden im letzten Ausdruck durch Wahl von ε und n

beliebig klein gemacht werden, und wieder gilt Ähnliches für $\Psi_2(u)$ und $\Psi(u)$.

Schließlich erhalten wir ganz ebenso für ein Intervall $a < u < b$, das im Intervall $-1 + \varepsilon \leqq u \leqq 1 - \varepsilon$ liegt und in welchem die Funktionen $\Psi_1(u)$ und $\Psi_2(u)$ stetig und monoton sind, mit $a \leqq \xi \leqq b$

(4)
$$\begin{aligned}&\int_a^b \Psi_1(u)\,[P'_n(u) + P'_{n+1}(u)]\,du \\ &= \lim_{h\to 0} \Psi_1(a+h) \int_a^\xi [P'_n(u) + P'_{n+1}(u)]\,du \\ &+ \lim_{h\to 0} \Psi_1(b-h) \int_\xi^b [P'_n(u) + P'_{n+1}(u)]\,du.\end{aligned}$$

Führen wir die Integrationen aus, so sehen wir, daß der Betrag dieses Ausdrucks mit Hilfe von (24·3) durch hinreichend große Wahl von n beliebig klein gemacht werden kann, weil $\Psi_1(u)$ beschränkt ist. Die Wahl von n hängt von ε ab. Ähnliches gilt für $\Psi_2(u)$ und $\Psi(u)$.

Da sich s_n nach (53·5) aus einer endlichen Anzahl von Integralen der Art (2), (3) und (4) zusammensetzt, erhält man wegen (1)

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{h\to 0} \Psi(1-h) = \lim_{h\to 0} \Phi(h),$$

weil $\Psi(u) = \Phi(\gamma)$ mit $u = \cos\gamma$ nach Ziffer 53 ist.

55. Bestimmung des Grenzwertes. Wir haben also jetzt das Verhalten von

$$\Phi(\gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\gamma, \bar\varphi)\,d\bar\varphi$$

für $\gamma = 0$ zu untersuchen. Ist $f(\vartheta, \varphi)$ in einer Umgebung eines bestimmten Punktes $P_0(\vartheta_0, \varphi_0)$ stetig, so ist $F(\gamma, \bar\varphi)$ in einer Umgebung von $\gamma = 0$ stetig, wenn wir P_0 als Pol für die Koordinaten $\gamma, \bar\varphi$ wählen, somit auch $\Phi(\gamma)$, also

(1)
$$\lim_{h\to 0} \Phi(h) = \Phi(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(0, \bar\varphi)\,d\bar\varphi = f(\vartheta_0, \varphi_0),$$

weil dem Punkt $\gamma = 0$ der Punkt $P_0(\vartheta_0, \varphi_0)$ entspricht.

$f(\vartheta, \varphi)$ möge nun im Punkt P_0 folgende Unstetigkeit besitzen: Durch den Punkt P_0 soll eine Kurve mit stetiger Tangente gehen, die folgende Eigenschaften hat: Nähert man sich dem Punkt P_0 unbegrenzt auf der einen Seite der Kurve, so sei f_1 der Grenzwert von $f(\vartheta, \varphi)$; nähert man sich ihm auf der anderen Seite, so sei der Grenzwert f_2. Im übrigen sei $f(\vartheta, \varphi)$ in

einer Umgebung $\mathfrak{U}$ von P_0 beschränkt, also $|f(\vartheta, \varphi)| < M$ in $\mathfrak{U}$ und außerdem in dieser Umgebung auf beiden Seiten der Kurve stetig. Wir beschreiben einen kleinen Kreis K mit dem sphärischen Halbmesser δ um den Punkt P_0 (Abb. 5). Für P_0 ist $\gamma = 0$. Die Richtung der Tangente unserer Kurve in P_0 sei gekennzeichnet durch $\overline{\varphi} = \beta_0$. Wir ziehen durch P_0 zwei Großkreise der Kugel, die mit der Tangente den Winkel η einschließen, und denken uns den Kreis K so klein, daß die Kurve ganz in dem Winkelraum $\mathfrak{W}$ von der Größe 2η zwischen den beiden Großkreisen verläuft und K selbst in $\mathfrak{U}$ liegt. Dann können wir schreiben

$$\int_0^{2\pi} F(\gamma, \overline{\varphi})\, d\overline{\varphi} = \int_0^{\beta_0-\eta} + \int_{\beta_0-\eta}^{\beta_0+\eta} + \int_{\beta_0+\eta}^{\beta_0+\pi-\eta} + \int_{\beta_0+\pi-\eta}^{\beta_0+\pi+\eta} + \int_{\beta_0+\pi+\eta}^{2\pi}.$$

Im ersten und letzten Integral unterscheidet sich $F(\gamma, \overline{\varphi})$ beliebig wenig von f_1, im mittleren beliebig wenig von f_2, und zwar so, daß $|F(\gamma, \overline{\varphi}) - f_1| < \varepsilon$ bzw. $|F(\gamma, \overline{\varphi}) - f_2| < \varepsilon$ für alle $|\gamma| < \delta$ und alle $\overline{\varphi}$ außerhalb des Winkelraumes $\mathfrak{W}$ ist, wobei δ nur von ε abhängt. Wir erhalten also für diese drei Integrale $(f_1 + f_2)(\pi - 2\eta)$, vermehrt um ein Korrektionsglied, das dem Betrage nach unterhalb $2\pi\varepsilon$ bleibt. Die beiden übrigen Integrale sind dem Betrage nach $< 4M\eta$. Wenn wir also ε und η entsprechend klein annehmen, so können wir durch passende Wahl von δ erreichen, daß sich $\int_0^{2\pi} F(\gamma, \overline{\varphi})\, d\overline{\varphi}$ von $(f_1 + f_2)\pi$ für alle $|\gamma| < \delta$ beliebig wenig unterscheidet. Es ist demnach

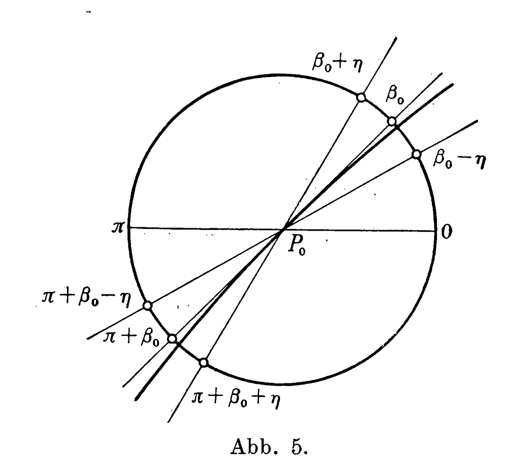


Abb. 5.

$$\lim_{h\to 0} \Phi(h) = \lim_{\gamma\to 0} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\gamma, \overline{\varphi})\, d\overline{\varphi} = \frac{1}{2}(f_1 + f_2). \tag{2}$$

56. Eigenschaften der zu entwickelnden Funktion. Wir wollen uns nun fragen: Für welche Funktionen $f(\vartheta, \varphi)$ ist $\Phi(\gamma)$ oder, was dasselbe ist, $\Psi(u)$ abteilungsweise stetig und monoton oder die Differenz zweier solcher Funktionen? $f(\vartheta, \varphi)$, als Funktion von γ und $\overline{\varphi}$ betrachtet, also $F(\gamma, \overline{\varphi})$, soll integrierbar sein und absolut integrierbare Ableitungen erster Ordnung

haben. Wir können dann schreiben $F(\gamma, \overline{\varphi}) = F_1(\gamma, \overline{\varphi}) - F_2(\gamma, \overline{\varphi})$, wobei

$$\begin{cases} F_1(\gamma, \overline{\varphi}) = \frac{1}{2}\left[\int\limits_0^{\gamma} |F_\gamma(\gamma', \overline{\varphi})|\, d\gamma' + F(\gamma, \overline{\varphi})\right], \\ F_2(\gamma, \overline{\varphi}) = \frac{1}{2}\left[\int\limits_0^{\gamma} |F_\gamma(\gamma', \overline{\varphi})|\, d\gamma' - F(\gamma, \overline{\varphi})\right] \end{cases}$$

ist. $F_1(\gamma, \overline{\varphi})$ und $F_2(\gamma, \overline{\varphi})$ wachsen für jeden Wert von $\overline{\varphi}$ monoton mit γ, da

$$F(\gamma, \overline{\varphi}) = \int\limits_0^{\gamma} F_\gamma(\gamma', \overline{\varphi})\, d\gamma' + F(0, \overline{\varphi})$$

ist. Dann ist aber auch

$$\text{(1)} \qquad \int\limits_0^{2\pi} F(\gamma, \overline{\varphi})\, d\overline{\varphi} = \int\limits_0^{2\pi} F_1(\gamma, \overline{\varphi})\, d\overline{\varphi} - \int\limits_0^{2\pi} F_2(\gamma, \overline{\varphi})\, d\overline{\varphi}$$

die Differenz zweier monoton wachsender Funktionen. Denn mit

$$F_1(\gamma + h, \overline{\varphi}) \geqq F_1(\gamma, \overline{\varphi}) \qquad (h > 0)$$

ist auch $\int\limits_0^{2\pi} F_1(\gamma + h, \overline{\varphi})\, d\overline{\varphi} \geqq \int\limits_0^{2\pi} F_1(\gamma, \overline{\varphi})\, d\overline{\varphi}$ und ähnlich für $F_2(\gamma, \overline{\varphi})$. Ist $F(\gamma, \overline{\varphi})$ noch so beschaffen, daß die beiden Integrale auf der rechten Seite von (1) bezüglich γ abteilungsweise stetig mit bestimmten linksseitigen und rechtsseitigen Grenzwerten sind, so sind die von uns vorausgesetzten Bedingungen für den Entwicklungssatz erfüllt.

Wenn $f(\vartheta, \varphi)$ in einem abgeschlossenen Flächenstück der Kugeloberfläche stetig und außerdem so beschaffen ist, daß sich die einzelnen Teile in (2), (3) und (4) von Ziffer 54, aus denen sich das Integral in s_n zusammensetzt und deren Beträge beliebig klein werden sollen, durch Wahl von ε und n dem Betrage nach beliebig klein machen lassen unabhängig davon, wo der Punkt $P_0(\vartheta_0, \varphi_0)$ in dem betreffenden Flächenstück liegt, dann konvergiert die Reihe (53·1) gleichmäßig gegen $f(\vartheta_0, \varphi_0)$ in dem genannten Flächenstück. Denn dann erfolgt wegen der gleichmäßigen Stetigkeit in dem abgeschlossenen Flächenstück auch der Grenzübergang (55·1) gleichmäßig.

57. Abelsche Reihenumformung. Im folgenden brauchen wir einige Tatsachen aus der Lehre von den unendlichen Reihen, die weniger geläufig sind und die wir hier daher zusammenstellen wollen. $s_n = \sum\limits_{\nu=1}^{n} u_\nu$ seien die Teilsummen der konvergenten unendlichen Reihe

$$\text{(1)} \qquad s = \sum_{\nu=1}^{\infty} u_\nu$$

mit beliebigen komplexen Gliedern u_ν. Die s_n sind daher beschränkt, es gibt somit eine feste Zahl M, so daß

(2) $$|s_n| < M$$

für alle n ist. $\alpha_1 \geqq \alpha_2 \geqq \alpha_3 \geqq \cdots$ sei eine Folge von nichtnegativen Zahlen, die nicht zunehmen, infolgedessen einen Grenzwert α haben. Wir betrachten nun die Reihe

(3) $$\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu u_\nu .$$

Für ihre Teilsummen erhalten wir

$$\sigma_n = \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu u_\nu = \alpha_1 s_1 + \alpha_2 (s_2 - s_1) + \cdots + \alpha_n (s_n - s_{n-1})$$

oder

$$\sigma_n - \alpha_n s_n = s_1(\alpha_1 - \alpha_2) + s_2(\alpha_2 - \alpha_3) + \cdots + s_{n-1}(\alpha_{n-1} - \alpha_n).$$

Die Reihe

(4) $$\sum_{\nu=1}^{\infty} s_\nu (\alpha_\nu - \alpha_{\nu+1})$$

konvergiert absolut, denn

(5) $$|s_\nu(\alpha_\nu - \alpha_{\nu+1})| \leqq M(\alpha_\nu - \alpha_{\nu+1})$$

und die Reihe

(6) $$\sum_{\nu=1}^{\infty} M(\alpha_\nu - \alpha_{\nu+1}) = M(\alpha_1 - \alpha)$$

konvergiert. Es ist also $\lim\limits_{n \to +\infty} (\sigma_n - \alpha_n s_n)$ vorhanden, somit auch $\sigma = \lim\limits_{n \to +\infty} \sigma_n$, weil

(7) $$\lim_{n \to +\infty} \alpha_n s_n = \alpha s$$

ist. Man erhält

$$|\sigma| \leqq \alpha\, |s| + M(\alpha_1 - \alpha) \leqq M \alpha_1 .$$

Wenn die Zahlen α_ν nicht abnehmen, aber beschränkt sind, so ist ebenfalls der Grenzwert α vorhanden; in diesem Fall können wir schreiben

(8) $$\sigma_n = \sum_{\nu=1}^{n} \alpha u_\nu - \sum_{\nu=1}^{n} (\alpha - \alpha_\nu) u_\nu .$$

Nun ist $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \alpha u_\nu = \alpha s$; ferner konvergiert, wie eben bewiesen wurde, $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} (\alpha - \alpha_\nu) u_\nu$, weil die Zahlen $\alpha - \alpha_\nu \geqq 0$ nicht zunehmen, daher ist wieder $\lim\limits_{n \to +\infty} \sigma_n$ vorhanden.

Wenn man also die Glieder einer konvergenten Reihe mit nichtnegativen Zahlen multipliziert, die entweder nicht zunehmen oder nicht abnehmen und in diesem Falle beschränkt sind, so konvergiert auch die neue Reihe. Man pflegt diesen Satz das Abelsche Reihenkriterium und die Umordnung der Glieder der Reihe (3) nach den s_ν die Abelsche Umformung zu nennen.

Sind die Glieder der Reihe (1) stetige, reelle Funktionen von reellen Veränderlichen und konvergiert die Reihe in einem abgeschlossenen Bereich B gleichmäßig bezüglich dieser Veränderlichen, so konvergiert auch die Reihe (3) gleichmäßig in B. Denn dann ist s stetig in B, daher gilt (2), folglich konvergiert die Reihe (4) wegen (5) und (6) gleichmäßig. Aber auch der Grenzübergang (7) erfolgt gleichmäßig, wie man aus $|\alpha s - \alpha_n s_n| \leqq \alpha |s - s_n| + |s_n|\,|\alpha - \alpha_n|$ erkennt. Der gleichmäßige Grenzübergang in (8) kann dann unmittelbar eingesehen werden.

Aus dem eben hergeleiteten Satz können wir folgenden Schluß ziehen: Wenn die Reihe $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$ für einen reellen Wert x_1 von x konvergiert, so konvergiert sie gleichmäßig in dem von 0 und x_1 begrenzten abgeschlossenen Intervall und hat zur Summe eine stetige Funktion. Es ist nämlich wegen der Konvergenz der Reihe $\left|\sum\limits_{\nu=n}^{n+p} a_\nu x_1^\nu\right| < \varepsilon$ für alle positiven p, sobald $n > N$ ist, wobei N von ε abhängt. Ferner sind die Zahlen $\left(\frac{x}{x_1}\right)^\nu$ $(\nu = n,\ n+1,\ n+2 \cdots)$ nicht negativ und nehmen wegen $|x| \leqq |x_1|$ nicht zu, daher konvergiert nach dem Abelschen Kriterium die Reihe $\sum\limits_{\nu=n}^{\infty} a_\nu\, x_1^\nu \left(\frac{x}{x_1}\right)^\nu = \sum\limits_{\nu=n}^{\infty} a_\nu\, x^\nu$, und ihre Summe ist dem Betrage nach $\leqq \varepsilon \left|\frac{x}{x_1}\right|^n \leqq \varepsilon$, d. h. $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$ konvergiert in dem von 0 und x_1 begrenzten abgeschlossenen Intervall gleichmäßig und ist daher eine stetige Funktion von x. Es ist also $\lim\limits_{x \to x_1} \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x_1^\nu$, wenn sich x dem Randpunkt x_1 vom Innern des Intervalls her unbegrenzt nähert. Diesen Satz pflegt man als Abelschen Grenzwertsatz zu bezeichnen.

58. Erste Randwertaufgabe für die Kugel. Als Beispiel für die in Ziffer 53 beschriebene Entwicklung nach Kugelfunktionen wollen wir die Randwertaufgaben der Potentialtheorie für die Kugel lösen. Die Kugel habe den Durchmesser a, ihr Mittelpunkt falle mit dem Nullpunkt des

Koordinatensystems zusammen. Bei der ersten Randwertaufgabe sind die Werte $\overline{V}$ der gesuchten Potentialfunktion V auf der Kugel gegeben, also $\overline{V} = f(\vartheta, \varphi)$. Im Unendlichen soll V mindestens von der Ordnung $\frac{1}{r}$ verschwinden, d. h. Vr beschränkt sein. $f(\vartheta, \varphi)$ möge sich in eine gleichmäßig konvergente Reihe nach LAPLACEschen Kugelfunktionen entwickeln lassen, $f(\vartheta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n(\vartheta, \varphi)$. Dann ist für die Werte V_i der gesuchten Potentialfunktion im Innern der Kugel $(r < a)$

$$V_i = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n S_n(\vartheta, \varphi),$$

für die Werte V_a im Äußern der Kugel $(r > a)$

$$V_a = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} S_n(\vartheta, \varphi).$$

Denn nach Ziffer 8 sind $r^n S_n(\vartheta, \varphi)$ und $r^{-(n+1)} S_n(\vartheta, \varphi)$ räumliche Kugelfunktionen, genügen somit der LAPLACEschen Differentialgleichung und für $r = a$ ist $V_i = V_a = \overline{V}$; daher konvergiert nach dem Satz von HARNACK[1]) der Potentialtheorie die erste dieser beiden Reihen gleichmäßig innerhalb und auf der Kugel, somit die zweite außerhalb und auf der Kugel. Schließlich verschwindet V im Unendlichen mindestens von der Ordnung $\frac{1}{r}$, wie verlangt wurde. Da unter diesen Bedingungen die erste Randwertaufgabe eindeutig lösbar ist, kann keine andere Lösung vorhanden sein.

Für die Belegungsdichte σ der Kugeloberfläche, welche dieses Potential hervorruft, ergibt sich nach einem Satz der Potentialtheorie

$$-4\pi\sigma = \left(\frac{\partial V_a}{\partial r} - \frac{\partial V_i}{\partial r}\right)_{r=a} = -\sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{n+1}{r}\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} + \frac{n}{r}\left(\frac{r}{a}\right)^n\right]_{r=a} S_n(\vartheta, \varphi),$$

daher

$$\text{(I)} \qquad \sigma = \frac{1}{4\pi a} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)\, S_n(\vartheta, \varphi),$$

falls diese Reihe gleichmäßig konvergiert. Denn nach dem Satz von HARNACK kann man die Reihen für V_i und V_a gliedweise differenzieren und erhält eine innerhalb und auf einer Kugel mit gleichem Mittelpunkt und kleinerem Halbmesser, bzw. eine außerhalb und auf einer Kugel mit gleichem Mittelpunkt und größerem Halbmesser gleichmäßig konvergente

---

[1]) Bezüglich der hier und später benützten Sätze der Potentialtheorie siehe z. B. O. KELLOGG, Foundations of Potential Theory, Berlin 1929, J. Springer, oder W. STERNBERG, Potentialtheorie, Sammlung Göschen, Bd. 901, 944, Berlin und Leipzig 1925 und 1926, W. de Gruyter & Co.

Reihe für die Ableitungen. Da aber diese Reihen wegen der gleichmäßigen Konvergenz von (1) nach dem ABELschen Reihenkriterium von Ziffer 57 auch für $r = a$ gleichmäßig konvergieren, so ist der gliedweise Grenzübergang $r \to a$ nach dem ABELschen Grenzwertsatz gerechtfertigt.

Die Gesamtbelegung ist daher

$$M = a^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sigma \sin\vartheta \, d\vartheta = \frac{a}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} S_n(\vartheta, \varphi) \sin\vartheta \, d\vartheta = a S_0,$$

weil 1 als Konstante eine LAPLACEsche Kugelfunktion nullten Grades und daher nach (49·1)

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} S_n(\vartheta, \varphi) \sin\vartheta \, d\vartheta = 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

ist.

Wenn umgekehrt die Dichte durch eine gleichmäßig konvergente Entwicklung nach LAPLACEschen Kugelfunktionen gegeben ist, $\sigma = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(\vartheta, \varphi)$, so muß nach (1) wegen der Eindeutigkeit der Entwicklung

$$S_n(\vartheta, \varphi) = \frac{4\pi a}{2n+1} T_n(\vartheta, \varphi)$$

sein, und daraus ergibt sich das durch σ erzeugte Potential V. Aus der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe für σ folgt nach dem ABELschen Reihenkriterium die gleichmäßige Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} S_n(\vartheta, \varphi)$, damit die der Reihen für V_i und V_a, dann die der differenzierten Reihen und die Möglichkeit des gliedweisen Grenzüberganges wie früher.

59. Zweite Randwertaufgabe für die Kugel. Hier verlangt man, daß die Werte von $\frac{\partial V}{\partial r}$ auf der Kugelfläche gegeben sind, also $\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_{r=a} = g(\vartheta, \varphi)$. Es möge sich wieder $g(\vartheta, \varphi)$ in eine gleichmäßig konvergente Reihe nach LAPLACEschen Kugelfunktionen entwickeln lassen, $g(\vartheta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(\vartheta, \varphi)$. Für das Innere setzen wir wie in der vorigen Ziffer

$$V_i = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n S_n(\vartheta, \varphi),$$

daher

$$\frac{\partial V_i}{\partial r} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\, r^{n-1}}{a^n} S_n(\vartheta, \varphi),$$

also

$$\left(\frac{\partial V_i}{\partial r}\right)_{r=a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{a} S_n(\vartheta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(\vartheta, \varphi),$$

(1)
$$S_n(\vartheta, \varphi) = \frac{a}{n} T_n(\vartheta, \varphi).$$

Wegen des Nenners müssen wir den Wert $n = 0$ ausschließen, d. h. die Aufgabe ist nur lösbar, wenn $T_0 = 0$ oder nach (53·2)

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} g(\vartheta, \varphi) \sin\vartheta \, d\vartheta = 0$$

ist. Das ist ein bekanntes Ergebnis der Potentialtheorie. Wie man weiß, ist diese Lösung bis auf eine additive Konstante eindeutig, in Übereinstimmung mit der Formel (1), in der S_0 willkürlich bleibt. Alle durchgeführten Rechnungen werden aus der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe für $g(\vartheta, \varphi)$ wie in der vorigen Ziffer gerechtfertigt.

Für das Äußere setzen wir wie in der vorigen Ziffer

$$V_a = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} S_n(\vartheta, \varphi),$$

daher

$$\frac{\partial V_a}{\partial r} = -\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \frac{a^{n+1}}{r^{n+2}} S_n(\vartheta, \varphi),$$

also

$$\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_{r=a} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{a} S_n(\vartheta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(\vartheta, \varphi),$$

$$S_n(\vartheta, \varphi) = -\frac{a}{n+1} T_n(\vartheta, \varphi).$$

Die Lösung erfüllt alle Bedingungen; wegen der Eindeutigkeit der Aufgabe kann es daher keine andere geben (Rechtfertigung der durchgeführten Rechnungen wie früher).

60. Dritte Randwertaufgabe für die Kugel. Auf der Kugeloberfläche, d. h. für $r = a$, seien die Werte von $h V + k \frac{\partial V}{\partial r}$ durch eine gleichmäßig konvergente Entwicklung nach LAPLACEschen Kugelfunktionen $\sum_{n=0}^{\infty} T_n(\vartheta, \varphi)$ gegeben. Für das Innere setzen wir

$$V_i = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n S_n(\vartheta, \varphi),$$

daher muß wegen der Randbedingung

$$\left(h + \frac{n k}{a}\right) S_n(\vartheta, \varphi) = T_n(\vartheta, \varphi)$$

oder

$$S_n(\vartheta, \varphi) = \frac{a\, T_n(\vartheta, \varphi)}{a h + n k}$$

sein. Der Nenner verschwindet nicht, wenn h und k dasselbe Zeichen haben. Wie man aus der Potentialtheorie weiß, ist gerade unter dieser

Bedingung die dritte Randwertaufgabe für den Innenraum eindeutig lösbar, daher ist die gefundene Lösung die einzig mögliche.

Für das Äußere setzen wir

$$V_a = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} S_n(\vartheta, \varphi),$$

daher muß wegen der Randbedingung

$$\left[h - \frac{(n+1)k}{a}\right] S_n(\vartheta, \varphi) = T_n(\vartheta, \varphi)$$

oder

$$S_n(\vartheta, \varphi) = \frac{a\, T_n(\vartheta, \varphi)}{a h - (n+1) k}$$

sein. Der Nenner verschwindet nicht, wenn h und k verschiedene Zeichen haben. Unter dieser Bedingung ist, wie aus der Potentialtheorie bekannt ist, die dritte Randwertaufgabe für den Außenraum eindeutig lösbar, daher ist abermals die gefundene Lösung die einzig mögliche. Der Nachweis der Konvergenz und der Berechtigung der durchgeführten Rechnungen erfolgt wie früher.

II. Kugelfunktionen mit beliebigen Zeigern.

§ 1. Gammafunktion.

1. Produktdarstellung des Sinus. Im folgenden werden wir verschiedene Eigenschaften der Gammafunktion brauchen und deshalb wollen wir sie hier kurz behandeln. Dazu ist vorerst die Darstellung des Sinus durch ein unendliches Produkt erforderlich. Wir zerlegen z in seinen reellen und imaginären Teil $z = x + iy$ und betrachten die Reihe

$$\varphi(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z-n)^2}.$$

Wie man sofort erkennt, ist

$$\varphi(z+1) = \varphi(z), \tag{1}$$

d. h. es genügt, die Funktion im Streifen $0 \leqq x \leqq 1$ zu betrachten, der von der imaginären Achse und einer zu ihr durch den Punkt 1 gezogenen Parallelen begrenzt ist. Es ist in diesem Streifen

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{|z-n|^2} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(x-n)^2 + y^2} \leqq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{|z+n|^2} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(x+n)^2 + y^2} \leqq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Schließen wir also in dem Streifen die Punkte 0 und 1 durch kleine Kreise aus und bezeichnen den übrigbleibenden Teil des Streifens mit B, so konvergiert in B die Reihe für $\varphi(z)$ absolut und gleichmäßig, $\varphi(z)$ ist daher wegen der Periodizitätseigenschaft (1) in der ganzen endlichen Ebene mit Ausnahme der Punkte $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ eine analytische Funktion von z. Da man wegen der gleichmäßigen Konvergenz gliedweise zur Grenze übergehen kann, erhält man im Streifen

$$\lim_{y \to \pm\infty} \varphi(z) = 0. \tag{2}$$

Wenn wir in der Reihe für $\varphi(z)$ das Glied $\frac{1}{z^2}$ weglassen, so wollen wir die übrigbleibende Summe mit $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{1}{(z-n)^2}$ bezeichnen. Innerhalb

eines Kreises K mit dem Mittelpunkt 0 und dem Halbmesser ϱ ist für hinreichend kleine ϱ

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{1}{|z-n|^2} < 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-\varrho)^2} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\left(1-\frac{\varrho}{n}\right)^2} < \frac{2}{(1-\varrho)^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

$\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{1}{(z-n)^2}$ konvergiert also in K absolut und gleichmäßig, ist somit dort analytische Funktion von z, infolgedessen gilt in K die Entwicklung

$$\varphi(z) = \frac{1}{z^2} + \mathfrak{p}(z),$$

wobei $\mathfrak{p}(z)$ eine nach positiven Potenzen von z fortschreitende Potenzreihe bedeutet. Nun ist in K ebenso

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} = \frac{1}{z^2}\left(1 - \frac{\pi^2 z^2}{6} + \cdots\right)^{-2} = \frac{1}{z^2} + \mathfrak{p}_1(z),$$

hiernach die Funktion

$$\psi(z) = \varphi(z) - \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z}$$

analytisch in K und daher für alle endlichen z gemäß der Periodizität und dem Verhalten von $\varphi(z)$. Ferner ist

$$|\sin \pi z| = \left|\frac{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}}{2i}\right| \geqq \frac{1}{2}\,|e^{\pi y} - e^{-\pi y}|,$$

daher in dem oben genannten Streifen

$$\lim_{y\to\pm\infty} \frac{1}{\sin \pi z} = 0$$

und wegen (2) auch

(3) $$\lim_{y\to\pm\infty} \psi(z) = 0.$$

Die Funktion $\psi(z)$ ist also in diesem Streifen analytisch und beschränkt, sonach wegen ihrer Periodizität auch für alle übrigen z. Sie ist deshalb eine Konstante, und zwar Null wegen (3).

Wir haben damit die Entwicklung

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} - \frac{1}{z^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^2}.$$

Sie konvergiert absolut und gleichmäßig für alle z, wenn wir die Punkte $\pm 1, \pm 2, \ldots$ durch entsprechend kleine Kreise vom Halbmesser ϱ und den Punkt ∞ durch einen genügend großen Kreis ausschließen. Denn es ist dann

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{1}{|z-n|^2} \leqq \sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{1}{(x-n)^2} < \frac{2}{\varrho^2} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Durch Integration nach z ergibt sich

$$-\int_0^z \left(\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi u} - \frac{1}{u^2}\right) du = \pi \operatorname{ctg} \pi z - \frac{1}{z}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n}\right),$$

da

$$\lim_{u \to 0} \left(\pi \operatorname{ctg} \pi u - \frac{1}{u}\right) = 0$$

ist. Nochmalige Integration liefert, indem wir $\lim_{u \to 0} [\ln \sin (\pi u) - \ln u] = \ln \pi$ berücksichtigen,

$$\int_0^z \left(\pi \operatorname{ctg} \pi u - \frac{1}{u}\right) du = \ln \sin \pi z - \ln z - \ln \pi$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\ln \left(1 - \frac{z}{n}\right) + \ln \left(1 + \frac{z}{n}\right)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right),$$

somit

(4) $$\sin \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$$

2. Integraldarstellungen der Gammafunktion. Im folgenden soll für Potenzen mit positiver Basis immer der Hauptwert genommen werden, also z. B. $t^z = e^{z \ln t}$ mit reellem $\ln t$. Wir definieren die Gammafunktion mit L. EULER[1]) für $\mathfrak{R}(z) = x > 0$ durch die Formel

(1) $$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$$

$$(z = x + iy = r e^{i\varphi}).$$

Im Bereich $x \geqq \varepsilon$, $|z| \leqq R$ (ε positiv beliebig klein, R beliebig groß) hat man für den absoluten Betrag des Integranden die Abschätzung

$$e^{-t} t^{x-1} \leqq e^{-t} t^{R-1}$$

für alle hinreichend großen t und $e^{-t} t^{x-1} \leqq e^{-t} t^{\varepsilon-1}$ für alle hinreichend kleinen positiven t.

Das Integral konvergiert demnach in dem genannten Bereich absolut und gleichmäßig und ist daher eine analytische Funktion von z. Die Bezeichnung $\Gamma(z)$ stammt von LEGENDRE[2]). Er führt daher auch den Namen EULERsches Integral zweiter Art ein. GAUSS[3]) schreibt

$$\prod (z-1) = \Gamma(z).$$

[1]) L. EULER, Inst. calc. Integr. 4 (1781) 337 oder Werke, 1. Serie, Bd. 19, S. **217.**

[2]) A. M. LEGENDRE, Exercices de calcul intégral 2 (Paris 1814) 4.

[3]) C. F. GAUSS, Werke Bd. 3, S. 230 (aus dem Nachlaß).

Wir formen (I) in folgender Weise um: Mit beliebig kleinem positivem δ ist $\left| e^{-t} - \sum_{n=0}^{N} \frac{(-t)^n}{n!} \right| < \delta$ für alle beschränkten t, sobald N genügend groß unabhängig von t gewählt wird. Man hat daher

$$\left| \int_0^1 e^{-t} t^{z-1}\, dt - \sum_{n=0}^{N} \int_0^1 \frac{(-t)^n}{n!} t^{z-1}\, dt \right| < \delta \int_0^1 |t^{z-1}|\, dt = \delta \int_0^1 t^{x-1}\, dt,$$

somit in dem oben angegebenen Bereich

$$\left| \int_0^1 e^{-t} t^{z-1}\, dt - \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n} \right| < \frac{\delta}{x} \leqq \frac{\delta}{\varepsilon}$$

oder

$$\int_0^1 e^{-t} t^{z-1}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n}$$

und damit

$$(2) \qquad \Gamma(z) = \int_0^1 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\, t^n}{n!} \right] t^{z-1}\, dt + \int_1^{\infty} e^{-t} t^{z-1}\, dt$$

$$= \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n} + \int_1^{\infty} e^{-t} t^{z-1}\, dt.$$

Schließen wir die Punkte $0, -1, -2, \ldots$ durch kleine Kreise und das Unendliche durch einen entsprechend großen Kreis aus, so konvergieren in der ganzen übrigen Ebene Summe und Integral in (2) gleichmäßig. Die Gammafunktion ist also durch (2) in die ganze Ebene mit Ausnahme der Stellen $0, -1, -2, \ldots$ analytisch fortgesetzt. Diese sind einfache Pole mit den Residuen $1, -1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{(-1)^n}{n!}, \ldots$

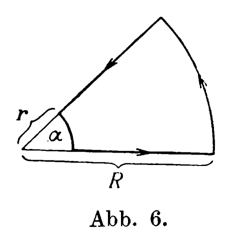


Abb. 6.

Statt das Integral in (I) längs der positiven reellen Achse zu erstrecken, können wir auch längs des Halbstrahles $|\alpha| \leqq \frac{\pi}{2} - \delta$ $(\delta > 0)$ integrieren. Denn auf dem geschlossenen Weg der Abb. 6 verschwindet das Integral nach dem CAUCHYschen Satz. Es strebt auf dem Kreisbogen mit dem Halbmesser r wegen $\Re(z) > 0$ mit r gegen Null, ebenso auf dem Kreisbogen vom Halbmesser R für $R \to +\infty$, weil hier $t = R(\cos\varphi + i \sin\varphi)$ und daher

$$|e^{-t+(z-1)\ln t}| = e^{-R\cos\varphi + (x-1)\ln R - y\varphi} < e^{-R\sin\delta + (x-1)\ln R + \frac{\pi}{2}|y|}$$

ist.

3. Produktdarstellung der Gammafunktion. Für positive p und t ist

$$e^{\frac{t}{p}} > 1 + \frac{t}{p},$$

daher

$$e^{-t} < \left(1 + \frac{t}{p}\right)^{-p},$$

somit nach (2·1) für positive z, wenn wir $1 + \frac{t}{p} = \frac{1}{s}$ setzen,

$$\text{(1)} \qquad \Gamma(z) < \int_0^\infty \left(1 + \frac{t}{p}\right)^{-p} t^{z-1}\, dt = p^z \int_0^1 s^{p-1-z}(1-s)^{z-1}\, ds.$$

Wir denken uns p so gewählt, daß $n = p - 1 - z$ eine positive ganze Zahl wird. Dann erhält man, wenn man fortgesetzt teilweise integriert,

$$\text{(2)} \qquad \int_0^1 s^n (1-s)^{z-1}\, ds = \frac{n}{z} \int_0^1 s^{n-1}(1-s)^z\, ds$$

$$= \frac{n}{z}\,\frac{n-1}{z+1} \cdots \frac{1}{z+n-1} \int_0^1 (1-s)^{z+n-1}\, ds = \frac{n!}{z(z+1)\cdots(z+n)},$$

somit aus (1)

$$\text{(3)} \qquad \Gamma(z) < (z+n+1)^z \frac{n!}{z(z+1)\cdots(z+n)}.$$

Ähnlich ergibt sich

$$e^t \leqq 1 + t + t^2 + \cdots = \frac{1}{1-t} \quad \text{für} \quad 0 \leqq t < 1,$$

daher

$$e^{-t} \geqq 1 - t \quad \text{für} \quad 0 \leqq t \leqq 1$$

und

$$e^{-\frac{t}{n}} \geqq 1 - \frac{t}{n} \quad \text{für} \quad 0 \leqq t \leqq n;$$

hiernach ist für positive z, wenn wir $1 - \frac{t}{n} = s$ setzen,

$$\text{(4)} \qquad \Gamma(z) > \int_0^n e^{-t} t^{z-1}\, dt \geqq \int_0^n t^{z-1}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt = n^z \int_0^1 s^n (1-s)^{z-1}\, ds,$$

also schließlich nach (2) und (4)

$$\text{(5)} \qquad \Gamma(z) > n^z \frac{n!}{z(z+1)\cdots(z+n)}.$$

Aus (3) und (5) folgern wir

$$\text{(6)} \qquad \Gamma(z)\left(\frac{n}{z+n+1}\right)^z < \frac{n^z n!}{z(z+1)\cdots(z+n)} < \Gamma(z),$$

demnach

$$\text{(7)} \qquad \Gamma(z) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^z n!}{z(z+1)\cdots(z+n)}.$$

Diese Formel verwendete GAUSS[1]) zur Definition der Gammafunktion.

[1]) C. F. GAUSS, Gött. Comm. Bd. 2 (1813) oder Werke Bd. 3, S. 145.

Aus (7) folgern wir

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{z-1}\, n!}{z(z+1)\cdots(z+n-1)} \frac{n}{z+n}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{z-1}}{\left(1+\frac{z-1}{1}\right)\left(1+\frac{z-1}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{z-1}{n}\right)},$$

daher

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \lim_{n\to+\infty} \left\{\left[\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z-1}{k}\right) e^{-\frac{z-1}{k}}\right] e^{(z-1)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n\right)}\right\}.$$

Nun ist

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n+1) + \ln\frac{n+1}{n}$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \int_k^{k+1}\frac{dx}{x}\right) + \ln\frac{n+1}{n},$$

ferner

$$\frac{1}{k+1} < \int_k^{k+1}\frac{dx}{x} < \frac{1}{k},$$

daher

$$0 < \frac{1}{k} - \int_k^{k+1}\frac{dx}{x} < \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)} < \frac{1}{k^2}.$$

$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k} - \int_k^{k+1}\frac{dx}{x}\right)$ konvergiert also zu einem positiven Grenzwert C. Weil

$$\lim_{n\to+\infty} \ln\frac{n+1}{n} = 0$$

ist, hat man auch

(8) $$\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n\right) = C,$$

somit

(9) $$\frac{1}{\Gamma(z)} = e^{C(z-1)} \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z-1}{n}\right) e^{-\frac{z-1}{n}}.$$

Diese Produktdarstellung geht auf WEIERSTRASS[1]) zurück. C wird als EULERsche Konstante[2]) bezeichnet.

---

[1]) K. WEIERSTRASS, J. reine angew. Math. 51 (1856) oder Werke Bd. 1, S. 153.

[2]) L. EULER, Petrop. Comm. 7 (1734/35[40]) 156 oder Werke, Serie 1, Bd. 14, S. 94.

4. Funktionalgleichungen. Wenn wir (2·1) teilweise integrieren, erhalten wir

$$\Gamma(z) = \left[\frac{t^z}{z}\, e^{-t}\right]_0^\infty + \frac{1}{z}\int_0^\infty e^{-t}\, t^z\, dt = \frac{1}{z}\,\Gamma(z+1),$$

also

(1) $$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

Nach (2·1) ist ferner

(2) $$\Gamma(1) = 1,$$

daher wegen (1) für alle positiven ganzzahligen n

(3) $$\Gamma(n+1) = n!$$

Der Formel (3·9) entnehmen wir für $0 < z < 1$

$$\frac{1}{\Gamma(1+z)} = e^{Cz} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}},$$

$$\frac{1}{\Gamma(1-z)} = e^{-Cz} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}},$$

also wegen (1·4)

$$\frac{1}{\Gamma(1+z)\,\Gamma(1-z)} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) = \frac{\sin \pi z}{\pi z}$$

oder nach (1)

(4) $$\Gamma(z)\,\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}.$$

Diese Gleichung liefert für $z = \frac{1}{2}$ die schon EULER bekannte Formel

(5) $$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Das Vorzeichen der Wurzel muß nach (2·1) positiv sein.

Die Gammafunktion genügt noch einer Funktionalgleichung, die schon LEGENDRE bekannt war. Wir gelangen zu ihr auf folgende Weise: Nach (3·7) ist

$$\frac{1}{\Gamma(z)\,\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{2z+\frac{1}{2}}\,(n!)^2}\, z\left(z+\frac{1}{2}\right)(z+1)\left(z+\frac{3}{2}\right)\cdots(z+n)\left(z+n+\frac{1}{2}\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{2z\,(2z+1)\cdots(2z+2n+1)}{n^{2z+\frac{1}{2}}\,(n!)^2\, 2^{2(n+1)}},$$

$$\Gamma(2z) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{2z}\, n!}{2z\,(2z+1)\cdots(2z+n)}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{(2n)^{2z}\,(2n)!}{2z\,(2z+1)\cdots(2z+2n)},$$

daher

$$\frac{\Gamma(2z)}{\Gamma(z)\,\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)} = 2^{2z} \lim_{n\to+\infty} \frac{(2n)!\,(2z+2n+1)}{\sqrt{n}\,(n!)^2\,2^{2(n+1)}} = 2^{2z-1} \lim_{n\to+\infty} \frac{(2n)!\,\sqrt{n}}{(n!)^2\,2^{2n}}.$$

Wir setzen nun $z=\frac{1}{2}$ und erhalten nach (2) und (5)

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(2n)!\,\sqrt{n}}{(n!)^2\,2^{2n}},$$

daher

(6) $$\frac{\Gamma(2z)}{\Gamma(z)\,\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)} = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}}.$$

Gemäß seiner Herleitung gilt (1) zunächst für $\Re(z)>0$, (4) für $0<z<1$, (6) für $z>0$. Durch analytische Fortsetzung wird jedoch die Gültigkeit der drei Funktionalgleichungen auf alle z ausgedehnt, für die jeweils beide Seiten der betreffenden Gleichung analytische Funktionen sind.

Aus (4) können wir schließen, daß $\Gamma(z)$ keine Nullstelle hat. Wäre nämlich a eine Nullstelle, so müßte $\Gamma(z)$ für $z=1-a$ unendlich werden, d. h. $1-a=0, -1, -2, \ldots$ sein gemäß Ziffer 2, also $a=1, 2, 3, \ldots$ Das ist aber nach (2) und (3) unmöglich.

5. Asymptotische Darstellung der Gammafunktion. Wir werden später eine näherungsweise Darstellung der Gammafunktion für große positive

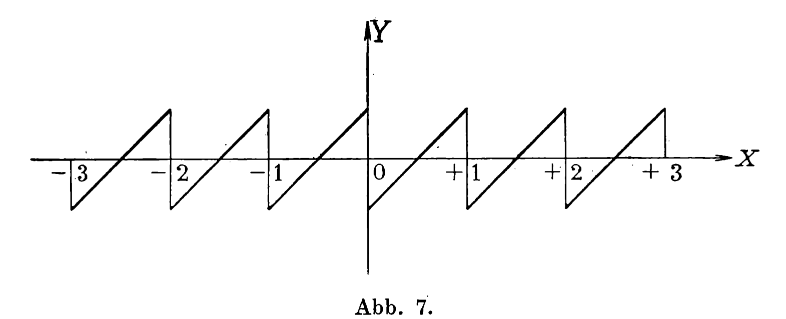


Abb. 7.

Werte von z und auch eine Abschätzung des dabei auftretenden Fehlers benötigen. Wir suchen zu diesem Zweck zuerst eine passende Formel für $\ln\Gamma(z)$ zu gewinnen. Wir definieren $B_1(x)=x-k-\frac{1}{2}$ für $k\leq x<k+1$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. $B_1(x)$ ist also überall stetig mit Ausnahme der Stellen $x=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, $B_1'(x)$ überall 1, ausgenommen die genannten Stellen, wo es nicht definiert ist (Abb. 7). Ferner ist

$$B_1(x+1)=B_1(x).$$

Damit ergibt sich für positive z und $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$

$$\int_k^{k+1} \ln(z+t)\,dt = \int_k^{k+1} \ln(z+t)\,B_1'(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[\ln(z+k+1) + \ln(z+k)\right] - \int_k^{k+1} \frac{B_1(t)}{z+t}\,dt;$$

für den Logarithmus soll immer der Hauptwert genommen werden. Wenn wir diese Gleichungen addieren, folgt

$$\int_0^n \ln(z+t)\,dt = \frac{1}{2}\left[\ln(z+n) + \ln z\right] + \sum_{k=1}^{n-1} \ln(z+k) - \int_0^n \frac{B_1(t)}{z+t}\,dt$$

oder

$$\sum_{k=0}^{n} \ln(z+k) = \int_0^n \ln(z+t)\,dt + \frac{1}{2}\left[\ln(z+n) + \ln z\right] + \int_0^n \frac{B_1(t)}{z+t}\,dt.$$

Nun ist

$$\int_0^n \ln(z+t)\,dt = \left[t \ln(z+t)\right]_0^n - \int_0^n \frac{t\,dt}{z+t}$$

$$= n \ln(z+n) - n + z\left[\ln(z+n) - \ln z\right],$$

daher

$$\sum_{k=0}^{n} \ln(z+k) = \left(z+n+\frac{1}{2}\right)\ln(z+n) - \left(z-\frac{1}{2}\right)\ln z - n + \int_0^n \frac{B_1(t)}{z+t}\,dt,$$

somit für $z = 1$

$$\sum_{k=0}^{n} \ln(1+k) = \left(1+n+\frac{1}{2}\right)\ln(1+n) - n + \int_0^n \frac{B_1(t)}{1+t}\,dt.$$

Wenn wir diese Gleichung von der vorhergehenden abziehen, erhalten wir

$$\sum_{k=0}^{n} \ln\frac{z+k}{1+k} - (z-1)\ln n = \left(1+n+\frac{1}{2}\right)\ln\frac{z+n}{1+n}$$

$$+ (z-1)\ln\frac{z+n}{n} - \left(z-\frac{1}{2}\right)\ln z + \int_0^n \frac{B_1(t)}{z+t}\,dt - \int_0^n \frac{B_1(t)}{1+t}\,dt.$$

Nun ist

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+n+\frac{1}{2}\right)\ln\frac{z+n}{1+n} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{z-1}{n+1}\right) = z-1,$$

daher

$$\lim_{n\to+\infty} \ln\frac{z(z+1)\cdots(z+n)}{(n+1)!}\,n^{-z+1} = z - 1 + \left(\frac{1}{2} - z\right)\ln z$$

$$+ \int_0^\infty \left[\frac{B_1(t)}{z+t} - \frac{B_1(t)}{1+t}\right]dt.$$

Denn der Grenzwert der linken Seite ist vorhanden, weil nach (3·7)

$$\Gamma(z) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^z\, n!}{z(z+1)\cdots(z+n)} \, \frac{n+1}{n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^{z-1}(n+1)!}{z(z+1)\cdots(z+n)}$$

ist. Somit folgt

(1) $$\ln \Gamma(z) = \left(z - \frac{1}{2}\right) \ln z - z + 1 - \int_0^\infty \left[\frac{B_1(t)}{z+t} - \frac{B_1(t)}{1+t}\right] dt.$$

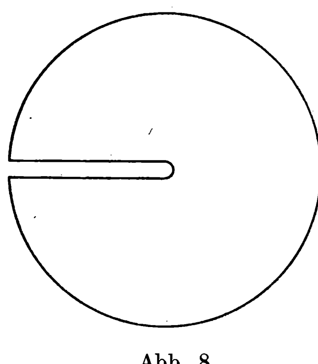


Abb. 8.

Diese Formel gilt zunächst gemäß ihrer Herleitung für positive z. Wir wollen versuchen, ihre Gültigkeit auf folgenden Bereich B (Abb. 8) auszudehnen: Die negative reelle Achse und der Nullpunkt seien durch zwei zur Achse parallele Gerade und einen Halbkreis vom Halbmesser δ ausgeschlossen, der Punkt $z = \infty$ durch einen Kreis vom Halbmesser R. δ kann beliebig klein, R beliebig groß sein.

Wir wollen das Integral umformen. Dies gelingt in folgender Weise: Wir definieren die Funktion $B_2(x)$ so, daß $B_2'(x) = B_1(x)$ an allen Stetigkeitsstellen von $B_1(x)$ und

$$\int_0^1 B_2(x)\, dx = 0$$

ist. Damit ergibt sich

$$B_2(x) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{24} \quad \text{für} \quad 0 \leqq x \leqq 1$$

und $B_2(x+1) = B_2(x)$, wenn wir auch Stetigkeit von $B_2(x)$ für $x = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ verlangen.

Zwischen 0 und $\frac{1}{2}$ nimmt $B_2(x)$ ab und dann zwischen $\frac{1}{2}$ und 1 wieder zu. Nun ist

$$B_2(0) = B_2(1) = \frac{1}{12}, \quad B_2\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{24},$$

somit ist $\frac{1}{12}$ der größte Wert, den $|B_2(x)|$ überhaupt annimmt. Damit erhalten wir im Bereich B

(2) $$\int_0^\infty \frac{B_1(t)}{z+t}\, dt = \left[\frac{B_2(t)}{z+t}\right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{B_2(t)}{(z+t)^2}\, dt = -\frac{1}{12z} + \int_0^\infty \frac{B_2(t)}{(z+t)^2}\, dt,$$

wobei das letzte Integral absolut und gleichmäßig konvergiert, weil $|B_2(t)| \leqq \frac{1}{12}$ und $|z+t| \geqq \frac{t}{2}$ in B für $t \geqq 2R$ ist, sonach

$$\int_{2R}^{\infty} \frac{dt}{(z+t)^2} < 4 \int_{2R}^{\infty} \frac{dt}{t^2} = \frac{2}{R}$$

unabhängig von z für alle genügend großen t beliebig klein wird. Das Integral ist also in B analytische Funktion von z, somit nach (2) auch $\int_0^\infty \frac{B_1(t)}{z+t}\,dt$, daher $\int_0^\infty \frac{B_1(t)}{1+t}\,dt$ endlich. Weil auch die übrigen Glieder der Gleichung (1) in B analytisch sind, ist damit ihre Gültigkeit auf den Bereich B erweitert.

Wir haben noch $\int_0^\infty \frac{B_1(t)}{1+t}\,dt$ zu berechnen. Weil dieses Integral eine feste reelle Zahl ist, können wir es aus (1) entnehmen, indem wir z. B. z längs der positiven imaginären Achse ins Unendliche streben lassen. Es ist nach (4·1)

$$\Gamma(1-z) = -z\,\Gamma(-z),$$

daher nach (4·4)

$$\Gamma(z)\,\Gamma(-z) = -\frac{\pi}{z \sin \pi z},$$

also, weil die Gammafunktion nach (2·2) für konjugiert komplexe Werte von z selbst konjugiert komplexe Werte annimmt,

(3) $$|\Gamma(iy)| = \sqrt{\frac{2\pi}{y(e^{\pi y} - e^{-\pi y})}}.$$

Ferner haben wir

(4) $$\left| \int_0^\infty \frac{B_2(t)}{(z+t)^2}\,dt \right| < \frac{1}{12} \int_0^\infty \frac{dt}{|z+t|^2},$$

(5) $$\int_0^\infty \frac{dt}{|z+t|^2} = \int_0^\infty \frac{dt}{(x+t)^2 + y^2}$$

$$= \frac{1}{y}\left[\operatorname{arc\,tg} \frac{t+x}{y}\right]_0^\infty = \frac{1}{|y|}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{|y|}\right),$$

wobei

$$\left|\operatorname{arc\,tg} \frac{x}{|y|}\right| \leqq \frac{\pi}{2}$$

ist, somit bei festem x nach (2), (4), (5)

(6) $$\lim_{y \to +\infty} \int_0^\infty \frac{B_1(t)}{z+t}\,dt = 0.$$

Es folgt hiernach aus (1), (3), (6)

$$1+\int_0^\infty \frac{B_1(t)}{1+t}\,dt=\Re\left[\ln\Gamma(iy)-\left(iy-\frac{1}{2}\right)\ln(iy)+iy+\int_0^\infty\frac{B_1(t)}{iy+t}\,dt\right]$$

$$=\lim_{y\to+\infty}\left[\ln|\Gamma(iy)|+\frac{1}{2}\ln y+\frac{\pi}{2}y\right]$$

$$=\lim_{y\to+\infty}\ln\sqrt{\frac{2\pi y e^{\pi y}}{y(e^{\pi y}-e^{-\pi y})}}=\frac{1}{2}\ln(2\pi).$$

Damit erhalten wir aus (1) die sogenannte verallgemeinerte STIRLINGsche Formel[1])

(7) $$\ln\Gamma(z)=\left(z-\frac{1}{2}\right)\ln z-z+\frac{1}{2}\ln(2\pi)-\int_0^\infty\frac{B_1(t)}{z+t}\,dt.$$

Da δ beliebig klein und R beliebig groß sein kann, gilt (7) in der ganzen, längs der negativen reellen Achse aufgeschnittenen z-Ebene. Ist $y=0$, so ist

$$\int_0^\infty\frac{dt}{|z+t|^2}=\int_0^\infty\frac{dt}{(x+t)^2}=\frac{1}{x},$$

somit wegen (2) und (4)

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^\infty\frac{B_1(t)}{x+t}\,dt=0$$

oder nach (7)

(8) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\Gamma(x)}{x^{x-\frac{1}{2}}e^{-x}\sqrt{2\pi}}=1.$$

Aus (8) und (4·3) schließen wir für positive ganzzahlige n

(9) $$\lim_{n\to+\infty}\frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}}=1.$$

6. Abschätzung des Restgliedes. Um das Integral in der Formel (7) der vorigen Ziffer genauer abzuschätzen, greifen wir auf die dort definierten Funktionen $B_1(x)$ und $B_2(x)$ zurück. Wie wir damals $B_2(x)$ aus $B_1(x)$ gebildet haben, so wollen wir jetzt $B_3(x)$ aus $B_2(x)$ bilden, d. h. wir setzen

$$B_3(x)=\frac{1}{6}\left(x-\frac{1}{2}\right)^3-\frac{1}{24}\left(x-\frac{1}{2}\right)\quad\text{für}\quad 0\leq x\leq 1$$

und

$$B_3(x+1)=B_3(x).$$

[1]) J. STIRLING, Methodus differentialis sive tractatus de summatione et interpolatione serierum infinitarum, London 1730.

Dann ist

$$B_3'(x) = B_2(x) \quad \text{und} \quad \int_0^1 B_3(x)\,dx = 0.$$

Weiter bilden wir ebenso $B_4(x)$ aus $B_3(x)$ und $B_5(x)$ aus $B_4(x)$, d.h. wir haben:

$$\begin{cases} B_4(x) = \frac{1}{24}\left(x - \frac{1}{2}\right)^4 - \frac{1}{48}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{5760} \quad \text{für} \quad 0 \leqq x \leqq 1, \\ B_4(x+1) = B_4(x), \quad B_4'(x) = B_3(x), \\ \int_0^1 B_4(x)\,dx = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} B_5(x) = \frac{1}{120}\left(x - \frac{1}{2}\right)^5 - \frac{1}{144}\left(x - \frac{1}{2}\right)^3 + \frac{7}{5760}\left(x - \frac{1}{2}\right) \quad \text{für} \quad 0 \leqq x \leqq 1, \\ B_5(x+1) = B_5(x), \\ B_5'(x) = B_4(x), \quad \int_0^1 B_5(x)\,dx = 0. \end{cases}$$

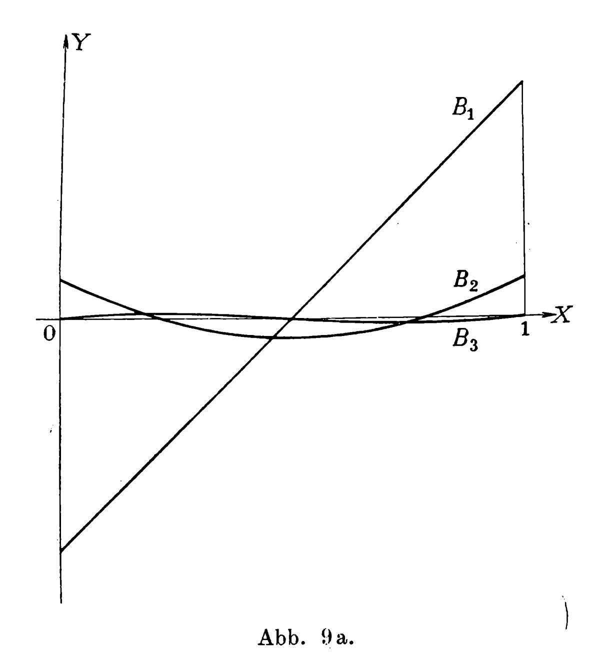


Abb. 9a.

Da die eingeführten Funktionen die Periode 1 haben, ergibt sich aus diesen Formeln folgendes Verhalten für jedes der Intervalle $k \leqq x \leqq k+1$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) (Abb. 9): Die Schaubilder von $B_1(x)$, $B_3(x)$, $B_5(x)$ sind spiegelbildlich in bezug auf den Mittelpunkt $\left(k + \frac{1}{2}, 0\right)$ des Intervalls, die von $B_2(x)$ und $B_4(x)$ spiegelbildlich in bezug auf die Gerade $x = k + \frac{1}{2}$.

Es genügt also, die Funktionen in der ersten Hälfte $\left(k \leqq x \leqq k + \frac{1}{2}\right)$ des Intervalls zu betrachten. $B_1(x)$ wächst geradlinig von $-\frac{1}{2}$ bis 0, $B_2(x)$ nimmt fortwährend von $\frac{1}{12}$ bis $-\frac{1}{24}$ ab, $B_3(x)$ wächst fortwährend von 0 bis zu einem größten Wert und nimmt dann fortwährend bis 0 ab, $B_4(x)$ wächst fortwährend von $-\frac{1}{720}$ bis $\frac{7}{5760}$, $B_5(x)$ nimmt fortwährend von 0 bis zu einem kleinsten Wert ab und wächst dann fortwährend

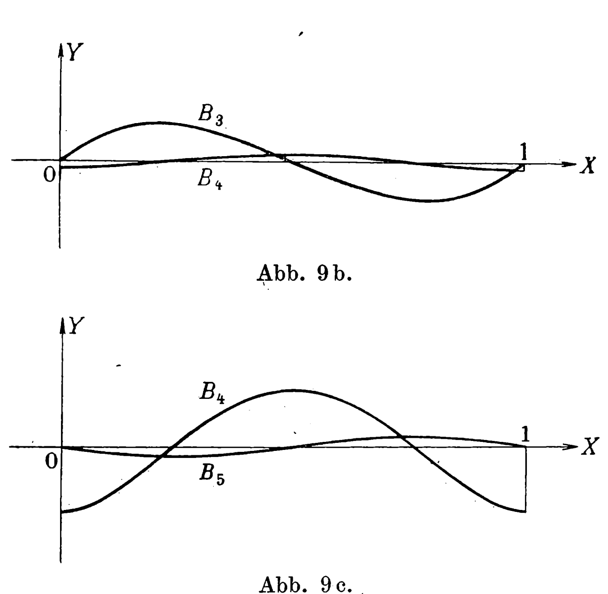


Abb. 9b.

Abb. 9c.

bis 0. Man pflegt diese Funktionen als BERNOULLIsche Polynome zu bezeichnen, weil sie zuerst bei JAKOB BERNOULLI[1]) auftreten. Das Schaubild von B_3 in Abb. 9b ist gegenüber dem in Abb. 9a zehnfach überhöht, ebenso das von B_4 in Abb. 9c gegenüber dem in Abb. 9b.

Für das Restglied in der Formel (5·7) ergibt sich für positives $z = x$, wenn wir fortwährend teilweise integrieren

$$(1) \qquad -\int_0^\infty \frac{B_1(t)}{x+t}\,dt = \frac{1}{12\,x} - \int_0^\infty \frac{B_2(t)}{(x+t)^2}\,dt$$

$$= \frac{1}{12\,x} - \left\{\left[\frac{B_3(t)}{(x+t)^2}\right]_0^\infty + 2\int_0^\infty \frac{B_3(t)}{(x+t)^3}\,dt\right\} = \frac{1}{12\,x} - 2\int_0^\infty \frac{B_3(t)}{(x+t)^3}\,dt$$

[1]) JAKOB BERNOULLI, Ars conjectandi, Basel 1713, S. 96, oder Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 107, S. 99 (Leipzig 1899).

und

$$(2)\qquad \int_0^\infty \frac{B_3(t)}{(x+t)^3}\,dt = \left[\frac{B_4(t)}{(x+t)^3}\right]_0^\infty + 3\int_0^\infty \frac{B_4(t)}{(x+t)^4}\,dt$$

$$= \frac{1}{720\,x^3} + 3\left\{\left[\frac{B_5(t)}{(x+t)^4}\right]_0^\infty + 4\int_0^\infty \frac{B_5(t)}{(x+t)^5}\,dt\right\} = \frac{1}{720\,x^3} + 12\int_0^\infty \frac{B_5(t)}{(x+t)^5}\,dt.$$

Aus

$$B_3\left(\frac{1}{2}-x\right) = -B_3\left(\frac{1}{2}+x\right)$$

folgt

$$\left|\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{B_3(t)}{(x+t)^3}\,dt\right| > \left|\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{B_3(t)}{(x+t)^3}\,dt\right|,$$

somit

$$\int_0^1 \frac{B_3(t)}{(x+t)^3}\,dt > 0,$$

weil $B_3(x) > 0$ für $0 < x < \frac{1}{2}$ ist, und ähnlich für die folgenden Intervalle $k \leqq x \leqq k+1$, daher auch

$$\int_0^\infty \frac{B_3(t)}{(x+t)^3}\,dt > 0.$$

Ebenso erhält man

$$\int_0^\infty \frac{B_5(t)}{(x+t)^5}\,dt < 0,$$

weil $B_5(x) < 0$ für $0 < x < \frac{1}{2}$ ist. Nach (2) ist daher

$$(3)\qquad \int_0^\infty \frac{B_3(t)}{(x+t)^3}\,dt = \frac{\vartheta}{720\,x^3},$$

wobei $0 < \vartheta < 1$ ist. Aus (5·7), (1) und (3) folgt für $x > 0$

$$(4)\qquad \ln\Gamma(x) = \left(x-\frac{1}{2}\right)\ln x - x + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + \frac{1}{12\,x} - \frac{\vartheta}{360\,x^3}.$$

7. Betafunktion. Wir definieren die Betafunktion durch die Formel

$$(1)\qquad B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt$$

mit $\Re(p) > 0$ und $\Re(q) > 0$. Der Name Betafunktion stammt von BINET[1]), LEGENDRE[2]) nennt das Integral das EULERsche Integral erster Art. Es

---

[1]) J. BINET, Ec. polyt. 27 (1839) 131.

[2]) A. M. LEGENDRE, Exerc. Bd. 1, S. 221; Bd. 2, S. 3.

ist $|t^{p-1}(1-t)^{q-1}| \leqq t^{\varepsilon-1}(1-t)^{\varepsilon-1}$ für $0<t<1$, $\Re(p) \geqq \varepsilon$, $\Re(q) \geqq \varepsilon > 0$; daher konvergiert das Integral absolut und gleichmäßig, ist infolgedessen analytische Funktion von p und q für $\Re(p)>0$, $\Re(q)>0$.

Die Betafunktion kann man durch die Gammafunktion darstellen. Das läßt sich nach JACOBI[1]) in folgender Weise machen.

Es ist nach (2·1)

$$(2)\qquad \Gamma(p)\,\Gamma(q) = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ N\to+\infty}} \int_\varepsilon^N e^{-x}\,x^{p-1}\,dx \int_\varepsilon^N e^{-y}\,y^{q-1}\,dy$$

$$= \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ N\to+\infty}} \int_\varepsilon^N\!\!\int_\varepsilon^N e^{-(x+y)}\,x^{p-1}\,y^{q-1}\,dx\,dy.$$

In dem Doppelintegral führen wir nun die neuen Veränderlichen u und v durch die Gleichungen

$$(3)\qquad x = u(1-v),\quad y = uv$$

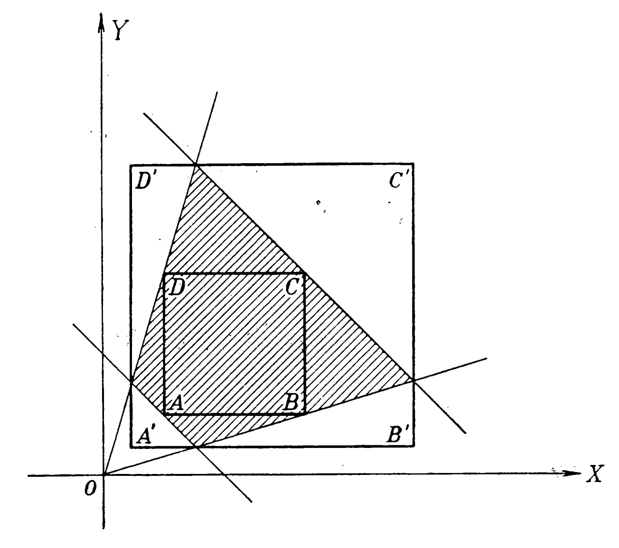


Abb. 10.

ein. Dann erhält man

$$(4)\qquad u = x + y,\quad v = \frac{y}{x+y}.$$

Das Quadrat $ABCD$ (Abb. 10) möge von den Geraden $x=\varepsilon$, $y=\varepsilon$, $x=N$, $y=N$ begrenzt sein. Dann lautet die Gleichung der beiden

---

[1]) C. G. J. JACOBI, J. reine angew. Math. 11 (1834) 307 oder Werke Bd. 6, S. 62.

unter 45° gegen die X-Achse geneigten Geraden durch die Punkte A bzw. C

(5) $$x + y = 2\varepsilon \quad \text{oder} \quad u = 2\varepsilon,$$

bzw.

$$x + y = 2N \quad \text{oder} \quad u = 2N$$

und die Gleichungen der beiden Geraden durch O und die Punkte B bzw. D

(6) $$\frac{y}{x} = \frac{\varepsilon}{N} \quad \text{oder} \quad v = \frac{\varepsilon}{N+\varepsilon}$$

bzw. $$\frac{y}{x} = \frac{N}{\varepsilon} \quad \text{oder} \quad v = \frac{N}{N+\varepsilon}.$$

Den von den Geraden (5) und (6) begrenzten, in Abb. 10 schraffierten Bereich nennen wir G. Das diesem Bereich umgeschriebene achsenparallele Quadrat $A'B'C'D'$ wird von den Geraden

$$x = \frac{2\,\varepsilon^2}{N+\varepsilon}, \quad y = \frac{2\,\varepsilon^2}{N+\varepsilon},$$

$$x = \frac{2\,N^2}{N+\varepsilon}, \quad y = \frac{2\,N^2}{N+\varepsilon}$$

begrenzt.

Nun ist für positive p und q

(7) $$\int\limits_{AB}\int\limits_{CD} e^{-(x+y)}\, x^{p-1}\, y^{q-1}\, dx\, dy < \iint\limits_{G} e^{-(x+y)}\, x^{p-1}\, y^{q-1}\, dx\, dy < \iint\limits_{A'B'C'D'} e^{-(x+y)}\, x^{p-1}\, y^{q-1}\, dx\, dy,$$

weil der Integrand positiv ist; ferner nach (3), (5) und (6)

$$\iint\limits_{G} e^{-(x+y)}\, x^{p-1}\, y^{q-1}\, dx\, dy = \iint\limits_{G} e^{-u}\, u^{p+q-1}\, v^{q-1}(1-v)^{p-1}\, du\, dv$$

$$= \int\limits_{2\varepsilon}^{2N} e^{-u}\, u^{p+q-1}\, du \int\limits_{\frac{\varepsilon}{N+\varepsilon}}^{\frac{N}{N+\varepsilon}} v^{q-1}(1-v)^{p-1}\, dv,$$

also nach (2·1) und (1)

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ N \to +\infty}} \iint\limits_{G} e^{-(x+y)}\, x^{p-1}\, y^{q-1}\, dx\, dy = \Gamma(p+q)\, B(q, p),$$

somit nach (7) und (2)

$$\Gamma(p)\,\Gamma(q) = \Gamma(p+q)\, B(q, p)$$

oder

(8) $$B(q, p) = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} = B(p, q).$$

Diese Formel war schon EULER[1]) bekannt. Zufolge analytischer Fortsetzung gilt sie für alle p und q mit positiven reellen Teilen. Durch sie kann man die Betafunktion für die ganze Ebene definieren.

[1]) L. EULER, Petrop. n. comm. 16 (1771[72]) 109 oder Werke, 1. Serie, Bd. 17, S. 331.

§ 2. Hypergeometrische Differentialgleichung.

8. Hypergeometrische Reihe. Nach (I·18) und (I·43) genügen die Funktionen $P_n^m(\xi)$ und $\mathfrak{Q}_n^m(\xi)$ der Differentialgleichung

$$(1) \qquad (1-\xi^2)\frac{d^2v}{d\xi^2} - 2\xi\frac{dv}{d\xi} + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-\xi^2}\right] v = 0.$$

Führen wir die Veränderliche w durch

$$v = (1-\xi^2)^{\frac{m}{2}}\, w$$

ein, so geht (1), wie in Ziffer (I·18) ausgeführt wurde, in

$$(2) \qquad (1-\xi^2)\frac{d^2w}{d\xi^2} - 2(m+1)\,\xi\frac{dw}{d\xi} + [n(n+1) - m(m+1)]\, w = 0$$

über. Führen wir schließlich an Stelle von ξ die Veränderliche $z = \frac{1-\xi}{2}$ oder $\xi = 1 - 2z$ ein und setzen wir

$$a = m - n, \quad b = m + n + 1, \quad c = m + 1,$$

so wird aus (2)

$$(3) \qquad z(1-z)\frac{d^2w}{dz^2} + [c - (a+b+1)\,z]\frac{dw}{dz} - abw = 0.$$

In unserem Fall hängen a, b, c voneinander ab, es ist nämlich

$$a + b + 1 = 2c,$$

ferner ist

$$m = \frac{a+b-1}{2}, \quad n = \frac{b-a-1}{2}.$$

Nach (I·18) sind m und n ganze Zahlen mit der Beschränkung $0 \leqq m \leqq n$. Die im übrigen willkürlichen Zahlen a und b sind daher so zu wählen, daß $\frac{b-1\pm a}{2}$ nichtnegative ganze Zahlen sind und außerdem $a \leqq 0$ ist.

Wir wollen jetzt die Lösungen unserer Differentialgleichung kennenlernen, wenn m und n beliebige komplexe Zahlen sind und auch v als komplexe Funktion der komplexen Veränderlichen ξ vorausgesetzt wird. Wir haben eben gesehen, daß sich diese Differentialgleichung in der Gestalt (3) schreiben läßt, wobei aber jetzt a und b beliebig sind und nur $c = \frac{a+b+1}{2}$ ist. Im folgenden wollen wir auch von dieser Bedingung absehen und die Lösungen der Differentialgleichung (3) bei beliebigen a, b, c untersuchen.

Wir setzen an

$$(4) \qquad w = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^{\lambda+n}.$$

Damit ergibt sich

$$z(1-z)\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda+n)(\lambda+n-1)\,A_n z^{\lambda+n-2}$$
$$+ [c - (a+b+1)\,z]\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda+n)\,A_n z^{\lambda+n-1} - ab\sum_{n=0}^{\infty} A_n z^{\lambda+n} = 0,$$

somit durch Koeffizientenvergleichung

$$-(\lambda+n)(\lambda+n-1)A_n+(\lambda+n+1)(\lambda+n)A_{n+1}$$
$$-(a+b+1)(\lambda+n)A_n+c(\lambda+n+1)A_{n+1}-abA_n=0$$

oder

$$[(\lambda+n)(a+b+\lambda+n)+ab]A_n=(\lambda+n+1)(\lambda+n+c)A_{n+1}$$

oder

$$A_{n+1}=\frac{(a+\lambda+n)(b+\lambda+n)}{(1+\lambda+n)(c+\lambda+n)}A_n. \tag{5}$$

Für das Glied niedrigster Ordnung $z^{\lambda-1}$ liefert die Koeffizientenvergleichung

$$\lambda(\lambda-1+c)=0,$$

hiernach

$$\lambda=0 \quad \text{oder} \quad \lambda=1-c.$$

Die mit $\lambda=0$, den Koeffizienten (5) und $A_0=1$ gebildete Reihe nennt man hypergeometrische Reihe und bezeichnet sie nach GAUSS[1]) mit

$$F(a,b,c,z)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)\,b(b+1)\cdots(b+n-1)}{1\cdot2\cdots n\,c(c+1)\cdots(c+n-1)}z^n. \tag{6}$$

Der Name „hypergeometrische Reihe" kommt zuerst bei WALLIS[2]) vor. Über die Konvergenzverhältnisse wollen wir in der nächsten Ziffer berichten. Damit diese Reihe nicht sinnlos werde, darf c keine negative ganze Zahl und auch nicht Null sein. Sie ändert sich nicht, wenn man a mit b vertauscht. Für ihre Koeffizienten stellen wir noch fest

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{A_{n+1}}{A_n}=1. \tag{7}$$

Für $\lambda=1-c$ erhält man aus (4), (5) und (6) die Lösung

$$z^{1-c}F(a-c+1,\,b-c+1,\,2-c,\,z).$$

Die Differentialgleichung (3) nennt man auch die hypergeometrische Differentialgleichung, ihre Lösungen hypergeometrische Funktionen.

9. Konvergenz der hypergeometrischen Reihe. Wir wollen im folgenden die Konvergenz der hypergeometrischen Reihe untersuchen. Zu diesem Zwecke beachten wir folgendes: Liegt die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ vor und ist $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|<q<1$ für alle $n>N$, so sind die Glieder der Reihe $\sum_{n=N+1}^{\infty}|u_n|$ nicht größer als die entsprechenden Glieder der Reihe $|u_{N+1}|\sum_{n=0}^{\infty}q^n$. Da diese

[1]) C. F. GAUSS, Gott. comm. rec. 2 (1813) oder Werke, Bd. 3, S. 123.

[2]) J. WALLIS, Arithmetica infinitorum (1656).

Reihe als geometrische Reihe wegen $q < 1$ konvergiert, konvergiert auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$. Hängen die Reihenglieder noch von irgend welchen Veränderlichen ab, q dagegen nicht und ist außerdem u_{N+1} beschränkt, so konvergiert die Reihe gleichmäßig in bezug auf diese Veränderlichen.

Ist $|u_{n+1}| \geqq |u_n| > 0$ für alle $n > N$, so divergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, weil dann die u_n nicht gegen Null streben. Ist aber $\lim\limits_{n \to +\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = 1$, so hat eine genauere Untersuchung einzusetzen.

Wenn es in diesem Fall eine positive Zahl ε gibt, so daß

$$\lim_{n \to +\infty} n\left(\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| - 1\right) = -1 - \varepsilon \tag{1}$$

ist, dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$. Wir vergleichen nämlich unsere Reihe mit der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, wobei $v_n = n^{-1-\frac{\varepsilon}{2}}$ ist. Es ist für alle $n \geqq 2$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1-\frac{\varepsilon}{2}} = 1 - \frac{1 + \frac{\varepsilon}{2}}{n} + \frac{1}{n^2}(\cdots). \tag{2}$$

Weil der Faktor von $\frac{1}{n^2}$ in (2) bezüglich n gleichmäßig beschränkt ist, erhält man

$$\lim_{n \to +\infty} n\left(\frac{v_{n+1}}{v_n} - 1\right) = -1 - \frac{\varepsilon}{2},$$

daher läßt sich wegen (1) eine Zahl N finden, so daß $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < \frac{v_{n+1}}{v_n}$ für alle $n > N$ ist. Die Glieder der Reihe $|u_{N+1}| + |u_{N+2}| + |u_{N+3}| + \cdots$ sind daher nicht größer als die entsprechenden Glieder der Reihe

$$|u_{N+1}|\left(1 + \frac{v_{N+2}}{v_{N+1}} + \frac{v_{N+3}}{v_{N+2}}\frac{v_{N+2}}{v_{N+1}} + \cdots\right) = \frac{|u_{N+1}|}{v_{N+1}}(v_{N+1} + v_{N+2} + v_{N+3} + \cdots),$$

d. h. aber $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ konvergiert, weil $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ konvergiert. Hängen die u_n noch von irgend welchen Veränderlichen ab, ε dagegen nicht und ist außerdem u_{N+1} beschränkt, so konvergiert die Reihe gleichmäßig in bezug auf die Veränderlichen.

Wenn wir nun (8·7) beachten, ergibt sich folgendes: Ist $|z| \leqq q < 1$, so konvergiert die hypergeometrische Reihe. Denn das Verhältnis zweier aufeinanderfolgender Glieder ist in diesem Fall für $n > N$ wegen (8·7) kleiner als $q(1 + \eta)$, wobei η eine beliebige positive Zahl ist. Wählen wir also z. B.

$\eta < \frac{1-q}{q}$, so ist $q(1+\eta) < 1$ und damit die Behauptung bewiesen. Die Reihe konvergiert gleichmäßig in bezug auf a, b, c, sobald a, b, c beschränkt und im Bereich für c die negativen ganzen Zahlen und Null durch kleine Kreise ausgeschlossen sind. Denn dann kann man η unabhängig von a, b, c wählen, und $|u_{N+1}|$ bleibt unterhalb einer festen Zahl.

Ist dagegen $|z| \geqq q > 1$, so divergiert die hypergeometrische Reihe. Denn in diesem Fall ist das Verhältnis zweier aufeinander folgender Glieder für alle hinreichend großen $n (> N)$ dem Betrage nach größer als $q(1-\eta)$, wobei wieder $\eta > 0$ beliebig klein gewählt werden kann, z. B. also $\eta < \frac{q-1}{q}$, so daß $q(1-\eta) > 1$ ist.

Ist aber $|z| = 1$, so ist das genannte Verhältnis für alle genügend großen n

$$(3)\qquad \left|\frac{(a+n-1)(b+n-1)}{n(c+n-1)}\right| = \left|1+\frac{a-1}{n}\right| \left|1+\frac{b-1}{n}\right| \left|1+\frac{c-1}{n}\right|^{-1}$$
$$= \left|1+\frac{a+b-c-1}{n}+\frac{1}{n^2}(\cdots)\right|.$$

Zerlegen wir a, b, c in ihre reellen und imaginären Teile:

$$a = a' + ia'', \quad b = b' + ib'', \quad c = c' + ic'',$$

so wird (3)

$$\left|1+\frac{a'+b'-c'-1+i(a''+b''-c'')}{n}+\frac{1}{n^2}(\cdots)\right|$$
$$= \sqrt{\left(1+\frac{a'+b'-c'-1}{n}\right)^2+\left(\frac{a''+b''-c''}{n}\right)^2+\frac{1}{n^2}(\cdots)}$$
$$= 1+\frac{a'+b'-c'-1}{n}+\frac{1}{n^2}(\cdots),$$

d. h. die hypergeometrische Reihe konvergiert für $|z| = 1$, wenn

$$\Re(a+b-c) < 0$$

ist, und zwar gleichmäßig unter den früheren Bedingungen für a, b, c, sobald $\Re(a+b-c) \leqq -\delta$ $(\delta > 0)$ ist. Die hypergeometrische Reihe ist also im Falle der gleichmäßigen Konvergenz eine analytische Funktion von a, b, c, z.

10. Integraldarstellung der hypergeometrischen Funktionen. Wir wollen jetzt versuchen, Lösungen der hypergeometrischen Differentialgleichung durch ein bestimmtes Integral darzustellen. Wir setzen an

$$(1)\qquad w = \int t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}(1-zt)^{-b}\,dt,$$

wählen für die im allgemeinen unendlich vieldeutige Funktion des Integranden einen bestimmten Zweig und erstrecken das Integral auf einem beliebigen Weg, der nur über reguläre Stellen des Integranden führt.

Es ist

$$\frac{dw}{dz} = b\int t^a(1-t)^{c-a-1}(1-zt)^{-b-1}\,dt,$$

$$\frac{d^2w}{dz^2} = b(b+1)\int t^{a+1}(1-t)^{c-a-1}(1-zt)^{-b-2}\,dt,$$

somit die linke Seite der hypergeometrischen Differentialgleichung

$$\begin{aligned} b\int t^{a-1}&(1-t)^{c-a-1}(1-zt)^{-b-2}\{(b+1)\,z(1-z)\,t^2\\ &+[c-(a+b+1)\,z]\,t(1-zt)-a(1-zt)^2\}\,dt\\ &=b\int t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}(1-zt)^{-b-2}\{(b-c+1)\,zt^2\\ &+[c+(a-b-1)\,z]\,t-a\}\,dt\\ &=b\int t^a(1-t)^{c-a}(1-zt)^{-b-1}\left(-\frac{a}{t}+\frac{c-a}{1-t}-\frac{b+1}{1-zt}z\right)dt\\ &=-b\int t^a(1-t)^{c-a}(1-zt)^{-b-1}\frac{d}{dt}\ln\left[t^a(1-t)^{c-a}(1-zt)^{-b-1}\right]dt\\ &=-b\int\frac{d}{dt}\left[t^a(1-t)^{c-a}(1-zt)^{-b-1}\right]dt\\ &=-b\left[t^a(1-t)^{c-a}(1-zt)^{-b-1}\right]_{\text{Anfang}}^{\text{Ende}}. \end{aligned}$$

Wenn also $t^a(1-t)^{c-a}(1-zt)^{-b-1}$ oder $t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}(1-zt)^{-b}$, d. h. der Integrand von (1) im Anfangs- und Endpunkt des Integrationsweges denselben Wert annimmt, ist das für w angesetzte Integral eine Lösung der hypergeometrischen Differentialgleichung. Diese Bedingung kann man durch eine passende Wahl des Integrationsweges zu erfüllen versuchen.

11. Berechnung von $F(a, b, c, 1)$. Im Anschluß an die vorige Ziffer betrachten wir

$$f(z) = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}(1-tz)^{-b}\,dt, \tag{1}$$

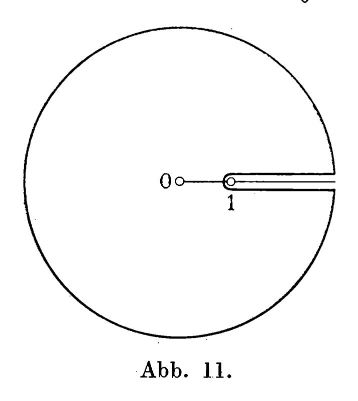


Abb. 11.

wobei wir $\Re(c) > \Re(a) > 0$ voraussetzen. Ferner schließen wir die auf der reellen Achse gelegenen Punkte $z \geqq 1$ dadurch aus, daß wir diesen Teil der reellen Achse in einen beliebig schmalen Streifen einschließen (Abb. 11). Wird außerdem der Punkt $z = \infty$ durch einen entsprechend großen Kreis ausgeschlossen, so ist in dem übrigen Teil B der z-Ebene und für $0 < t < 1$ der Integrand eine analytische Funktion von z und t. Das Integral konvergiert gleichmäßig bezüglich z, denn der Betrag des Integranden ist für $0 \leqq t \leqq \delta$ bei entsprechend kleinem δ kleiner als $Kt^{\Re(a)-1}$, wobei K eine von z unabhängige, feste, positive Zahl bedeutet, die aller-

dings noch von a, b, c abhängen kann, der Betrag von $\int_0^\delta$ daher kleiner als $K\frac{\delta^{\Re(a)}}{\Re(a)}$. Für $1-\delta \leq t \leq 1$ dagegen ist der Betrag des Integranden kleiner als $K(1-t)^{\Re(c-a-1)}$, der von $\int_{1-\delta}^1$ daher kleiner als $K\frac{\delta^{\Re(c-a)}}{\Re(c-a)}$. Das Integral ist also eine analytische Funktion von z, wenn wir die Werte $z \geq 1$ ausnehmen.

Liegt z im Intervall $1-\varepsilon \leq z \leq 1$ mit entsprechend kleinem positivem ε, so ist der Integrand stetige Funktion von z und t für $0 < t < 1$. Das Integral konvergiert gleichmäßig bezüglich z, falls wir noch $\Re(c-a-b) > 0$ voraussetzen. Denn für $0 \leq t \leq \delta$ ergibt sich wieder der Betrag des Integrals kleiner als $K\frac{\delta^{\Re(a)}}{\Re(a)}$, dagegen für $1-\delta \leq t \leq 1$ ist wegen $1-t \leq 1-tz \leq 1-(1-\varepsilon)t$ der Betrag des Integranden kleiner als $K(1-t)^{\Re(c-a-b-1)}$ bei $\Re(b) > 0$, also der von $\int_{1-\delta}^1$ kleiner als $K\frac{\delta^{\Re(c-a-b)}}{\Re(c-a-b)}$, bei $\Re(b) \leq 0$ aber der Betrag des Integranden kleiner als $K(1-t)^{\Re(c-a-1)}$, daher der von $\int_{1-\delta}^1$ kleiner als $K\frac{\delta^{\Re(c-a)}}{\Re(c-a)}$. Das Integral ist demnach noch stetig in $z = 1$, falls sich z auf der reellen Achse dem Punkt 1 von kleineren Werten her nähert.

Nun ist

$$\left|(1-tz)^{-b} - \left[1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{b(b+1)\cdots(b+k-1)}{k!}(tz)^k\right]\right| < \varepsilon$$

bei beliebigem positivem ε für $0 \leq t \leq 1$, $|z| \leq 1-\delta$ $(0 < \delta < 1)$, falls n größer als eine bestimmte Zahl N ist, die nur von ε, aber nicht von t und z abhängt, somit nach (1)

$$\left|f(z) - \left[\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}\,dt + \sum_{k=1}^{n} \frac{b(b+1)\cdots(b+k-1)}{k!} z^k \times \int_0^1 t^{a+k-1}(1-t)^{c-a-1}\,dt\right]\right| < \varepsilon \int_0^1 t^{\Re(a)-1}(1-t)^{\Re(c-a)-1}\,dt$$

oder nach (7·1), (7·8), (4·1), (8·6)

$$\begin{aligned} f(z) &= B(a, c-a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b(b+1)\cdots(b+n-1)}{n!} B(a+n, c-a) z^n \\ &= \frac{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}{\Gamma(c)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b(b+1)\cdots(b+n-1)}{n!} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(c-a)}{\Gamma(c+n)} z^n \\ &= \frac{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}{\Gamma(c)} F(a, b, c, z). \end{aligned}$$

Es ist daher

$$(2) \qquad F(a, b, c, z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\,\Gamma(c-a)} \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}(1-zt)^{-b}\,dt.$$

Wir haben damit die durch die hypergeometrische Reihe im Einheitskreis dargestellte hypergeometrische Funktion analytisch über die ganze Ebene fortgesetzt, das Stück der positiven reellen Achse von 1 bis $+\infty$ ausgenommen, allerdings unter gewissen Beschränkungen für a und c.

Weil die Reihe $F(a, b, c, z)$ gemäß Ziffer 9 noch für $z = 1$ wegen $\Re(a+b-c) < 0$ konvergiert, können wir nach dem ABELschen Grenzwertsatz (I·57) mit z auf der reellen Achse den Grenzübergang nach 1 von kleineren Werten her vornehmen und erhalten aus (2), (7·1) und (7·8) wegen der Stetigkeit des Integrals

$$F(a, b, c, 1) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\,\Gamma(c-a)} \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-b-1}\,dt$$

$$= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\,\Gamma(c-a)}\, B(a, c-a-b) = \frac{\Gamma(c)\,\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\,\Gamma(c-b)}.$$

Da $F(a, b, c, 1)$ gemäß Ziffer 9 analytische Funktion von a, b, c ist, gilt

$$(3) \qquad F(a, b, c, 1) = \frac{\Gamma(c)\,\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\,\Gamma(c-b)},$$

solange beide Seiten der Gleichung analytische Funktionen von a, b, c sind, d. h. unter den Bedingungen: $\Re(a+b-c) < 0$ und c ungleich einer negativen ganzen Zahl oder Null.

12. Umformungen der hypergeometrischen Reihe. Führen wir in (8·3) statt w die neue Veränderliche u durch

$$(1) \qquad w = (1-z)^{c-a-b}\, u,$$

$$\frac{dw}{dz} = -(c-a-b)(1-z)^{c-a-b-1}\, u + (1-z)^{c-a-b}\frac{du}{dz},$$

$$\frac{d^2w}{dz^2} = (c-a-b)(c-a-b-1)(1-z)^{c-a-b-2}\, u - 2(c-a-b)(1-z)^{c-a-b-1}\frac{du}{dz} + (1-z)^{c-a-b}\frac{d^2u}{dz^2}$$

ein, so erhalten wir für u die Differentialgleichung

$$z(1-z)\frac{d^2u}{dz^2} + [c-(2c-a-b+1)\,z]\frac{du}{dz} - (c-a)(c-b)\,u = 0.$$

Diese Gleichung hat nach Ziffer 8 die Lösungen

$$u_1 = F(c-a,\ c-b,\ c,\ z) \quad \text{und} \quad u_2 = z^{1-c} F(1-a,\ 1-b,\ 2-c,\ z).$$

Die beiden Lösungen sind für $c \neq 1$ voneinander linear unabhängig, also muß, da $u_3 = (1-z)^{a+b-c} F(a, b, c, z)$ nach (1) eine Lösung ist, u_3 eine Linearkombination von u_1 und u_2 sein. Ist nun c keine negative ganze Zahl

und auch nicht Null, so ist $z = 0$ eine singuläre Stelle von u_2, dagegen reguläre Stelle von u_1 und u_3, so daß für die Linearkombination u_2 ausscheidet und daher u_1 und u_3 proportional sein müssen. Durch Vergleichen der konstanten Glieder erhält man

(2) $$F(a, b, c, z) = (1 - z)^{c-a-b} F(c - a, c - b, c, z).$$

Da $F(a, b, c, z)$ analytisch von a, b, c abhängt, gilt diese Gleichung für alle Werte von a, b, c, z, für die beide Seiten überhaupt einen Sinn haben.

Führt man in (8·3) statt z die neue Veränderliche $x = \frac{z}{z-1}$ ein, so hat man

$$z = \frac{x}{x-1}, \quad z - 1 = \frac{1}{x-1},$$

$$\frac{dx}{dz} = -\frac{1}{(z-1)^2} = -(x-1)^2,$$

$$\frac{dw}{dz} = -\frac{dw}{dx}(x-1)^2, \quad \frac{d^2w}{dz^2} = \frac{d^2w}{dx^2}(x-1)^4 + 2\frac{dw}{dx}(x-1)^3,$$

daher

$$-x(x-1)^2\frac{d^2w}{dx^2} + (x-1)[c + (a+b-c-1)x]\frac{dw}{dx} - abw = 0.$$

Wir setzen jetzt noch

$$w = (1-z)^{-a}u = (1-x)^a u,$$

$$\frac{dw}{dx} = -a(1-x)^{a-1}u + (1-x)^a\frac{du}{dx},$$

$$\frac{d^2w}{dx^2} = a(a-1)(1-x)^{a-2}u - 2a(1-x)^{a-1}\frac{du}{dx} + (1-x)^a\frac{d^2u}{dx^2}$$

und erhalten

$$x(1-x)\frac{d^2u}{dx^2} + [c - (a + c - b + 1)x]\frac{du}{dx} - a(c-b)u = 0.$$

Nach Ziffer 8 ist $F(a, c-b, c, x)$ eine Lösung dieser Differentialgleichung. Es muß daher

(3) $$w = (1-z)^{-a} F\left(a, c-b, c, \frac{z}{z-1}\right)$$

eine Lösung von (8·3), d. h. in der Gestalt

$$w = AF(a, b, c, z) + Bz^{1-c}F(a - c + 1, b - c + 1, 2 - c, z)$$

darstellbar sein. Ist c keine negative ganze Zahl und auch nicht 0 oder 1, so ist $z = 0$ singuläre Stelle dieser Funktion, falls $B \neq 0$ ist, aber reguläre Stelle von (3), daher muß hier $B = 0$ sein. Für $z = 0$ erhält man dann $A = 1$, somit

(4) $$F(a, b, c, z) = (1-z)^{-a} F\left(a, c-b, c, \frac{z}{z-1}\right).$$

Nach entsprechenden Überlegungen wie bei (2) gilt diese Gleichung für alle Werte von a, b, c, z, für die sie überhaupt einen Sinn hat.

Schreibt man in der Differentialgleichung (8·3) $1-z$ statt z, so lautet die neue Differentialgleichung

$$z(1-z)\frac{d^2w}{dz^2}+[1+a+b-c-(a+b+1)z]\frac{dw}{dz}-abw=0.$$

Sie hat die beiden Lösungen

$$F(a,b,1+a+b-c,z) \quad \text{und} \quad z^{c-a-b}F(c-a,c-b,c-a-b+1,z).$$

Sie sind voneinander linear unabhängig, wenn $c \neq a+b$ ist. Es muß also $F(a,b,c,z)$ eine Linearkombination dieser beiden Lösungen sein, wenn man in ihnen z durch $1-z$ ersetzt, d. h. es ist

$$F(a,b,c,z)=AF(a,b,1+a+b-c,1-z)+B(1-z)^{c-a-b}F(c-a,c-b,c-a-b+1,1-z).$$

Um A und B zu bestimmen, setzen wir zuerst $z=1$ und erhalten nach (11·3) für $\mathfrak{R}(a+b-c)<0$

$$A=F(a,b,c,1)=\frac{\Gamma(c)\,\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\,\Gamma(c-b)}.$$

$z=0$ liefert dann für $\mathfrak{R}(c)<1$

$$1=\frac{\Gamma(c)\,\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\,\Gamma(c-b)}F(a,b,1+a+b-c,1)+BF(c-a,c-b,c-a-b+1,1)$$

oder mit Hilfe von (4·4)

$$B=\frac{\Gamma(1-a)\,\Gamma(1-b)\,[\Gamma(c-a)\,\Gamma(c-b)\,\Gamma(1+b-c)\,\Gamma(1+a-c)-\Gamma(c)\,\Gamma(1-c)\,\Gamma(c-a-b)\,\Gamma(1+a+b-c)]}{\Gamma(c-a)\,\Gamma(c-b)\,\Gamma(1+b-c)\,\Gamma(1+a-c)\,\Gamma(1-c)\,\Gamma(c-a-b+1)}$$

$$=\frac{\Gamma(c)\,\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}\,\frac{-\sin\pi c\sin\pi(c-a-b)\left[\dfrac{1}{\sin\pi(c-a)\sin\pi(c-b)}-\dfrac{1}{\sin\pi c\sin\pi(c-a-b)}\right]}{\dfrac{\sin\pi a\sin\pi b}{\sin\pi(c-a)\sin\pi(c-b)}}$$

$$=\frac{\Gamma(c)\,\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}\,\frac{\sin\pi(c-a)\sin\pi(c-b)-\sin\pi c\sin\pi(c-a-b)}{\sin\pi a\sin\pi b}=\frac{\Gamma(c)\,\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}.$$

Man erhält daher die Gleichung

$$(5)\quad F(a, b, c, z) = \frac{\Gamma(c)\,\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\,\Gamma(c-b)}\, F(a, b, 1+a+b-c, 1-z)$$
$$+ \frac{\Gamma(c)\,\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}\,(1-z)^{c-a-b}\, F(c-a, c-b, c-a-b+1, 1-z).$$

Wie bei (2) und (4) gilt sie für alle Werte von a, b, c, z, für die sie überhaupt einen Sinn hat.

13. Kugelfunktionen als hypergeometrische Reihen. Viele der im ersten Teil für die Kugelfunktionen erhaltenen Entwicklungen sind hypergeometrische Reihen. Z. B. lautet die Formel (I, 13·3)

$$(1)\quad P_n(\xi) = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{n!}\left[\xi^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}\,\xi^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 4(2n-1)(2n-3)}\,\xi^{n-4} + \cdots\right]$$
$$= \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}\,\xi^n F\left(-\frac{n}{2}, \frac{1-n}{2}, \frac{1}{2}-n, \frac{1}{\xi^2}\right).$$

In diesem Fall ist c niemals eine ganze Zahl, a negativ ganz oder 0 für gerades n, b negativ ganz oder 0 für ungerades n, d. h. die Reihe bricht ab, wie es ja sein muß, da $P_n(\xi)$ ein Polynom in ξ ist.

Die Formel (I, 33·2) lautet in unserer Schreibweise

$$(2)\quad \mathfrak{Q}_n(\xi) = \frac{n!}{1\cdot 3\cdots(2n+1)}\left[\frac{1}{\xi^{n+1}} + \frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)}\,\frac{1}{\xi^{n+3}}\right.$$
$$\left. + \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2\cdot 4(2n+3)(2n+5)}\,\frac{1}{\xi^{n+5}} + \cdots\right]$$
$$= \frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!}\,\frac{1}{\xi^{n+1}}\,F\left(\frac{n+1}{2}, \frac{n}{2}+1, \frac{2n+3}{2}, \frac{1}{\xi^2}\right).$$

In diesem Fall sind $a, b, c > 0$, die Reihe bricht nicht ab und konvergiert für $|\xi| > 1$.

Die Lösung u_1 der Differentialgleichung (I, 38·1) die den Formeln (2) der genannten Ziffer entspricht, ist

$$u_1 = c_0\, z^{\frac{n+1}{2}}\, F\left(\frac{1}{2}, n+1, n+\frac{3}{2}, z\right),$$

die den Formeln (3) entsprechende Lösung u_2 ist

$$u_2 = c_0\, z^{-\frac{n}{2}}\, F\left(\frac{1}{2}, -n, \frac{1}{2}-n, z\right).$$

Im ersten Fall sind $a, b, c, > 0$, die Reihe bricht nicht ab und konvergiert für $|z| < 1$, d. h. man erhält gemäß den Formeln der genannten Ziffer

$$(3)\quad \mathfrak{Q}_n(\xi) = \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}\left(\xi - \sqrt{\xi^2-1}\right)^{n+1} F\left[\frac{1}{2}, n+1, n+\frac{3}{2}, \left(\xi - \sqrt{\xi^2-1}\right)^2\right],$$

wobei für $\sqrt{\xi^2-1}$ derjenige Zweig zu nehmen ist, der für $\xi > 1$ positiv ist. Die Reihe konvergiert für $|\xi - \sqrt{\xi^2-1}| < 1$. Die Grenze des Kon-

vergenzbereiches ist also durch

$$|\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}| = 1 \quad \text{oder} \quad \xi - \sqrt{\xi^2 - 1} = e^{i\varphi},$$

d. h. durch $\xi = \cos\varphi$ mit reellem φ gegeben. Das ist aber das Stück der reellen Achse zwischen -1 und $+1$, d. h. die Reihe konvergiert in der ganzen ξ-Ebene, ausgenommen das Stück der reellen Achse zwischen -1 und $+1$, die Endpunkte eingeschlossen.

Im zweiten Fall ist c nie eine ganze Zahl, b negativ ganz oder 0, d. h. die Reihe bricht ab in Übereinstimmung damit, daß die entsprechende Lösung $P_n(\xi)$ für passendes c_0 darstellt, nämlich gemäß der genannten Ziffer

$$(4) \quad P_n(\xi) = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\left(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}\right)^{-n} F\left[\frac{1}{2} - n, \frac{1}{2} - n, \left(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}\right)^2\right].$$

Für die Gleichung (8·3) haben wir die beiden Lösungen $F(a, b, c, z)$ und

$$z^{1-c} F(a - c + 1, b - c + 1, 2 - c, z)$$

erhalten. Setzen wir für a, b, c, z ihre Werte aus Ziffer 8 ein, so ergeben sich

$$F\left(m - n, m + n + 1, m + 1, \frac{1 - \xi}{2}\right)$$

und

$$\left(\frac{1 - \xi}{2}\right)^{-m} F\left(-n, n + 1, 1 - m, \frac{1 - \xi}{2}\right),$$

daher als Lösungen für (8·1)

$$(5) \qquad v_1 = (\xi^2 - 1)^{\frac{m}{2}} F\left(m - n, m + n + 1, m + 1, \frac{1 - \xi}{2}\right),$$

$$v_2 = \left(\frac{\xi + 1}{\xi - 1}\right)^{\frac{m}{2}} F\left(-n, n + 1, 1 - m, \frac{1 - \xi}{2}\right).$$

Für $0 \leqq m \leqq n$ (m, n ganze Zahlen) ist $a \leqq 0$, $c > 0$ bei v_1, die Reihe bricht ab, stellt also gemäß (I·43) bis auf einen Faktor $\mathfrak{P}_n^m(\xi)$ dar, da v_1 keine logarithmischen Singularitäten in $\xi = \pm 1$ hat; bei v_2 ist $a \leqq 0$, $c \leqq 0$ und $|a| > |c|$ für $m \neq 0$, d. h. die Reihe ist unbrauchbar. Für $m = 0$ fallen beide Reihen zusammen. Die Reihe für v_1 bricht mit dem Glied $\left(\frac{1 - \xi}{2}\right)^{n-m}$ ab, der betreffende Koeffizient ist

$$\frac{(m - n)(m - n + 1)\cdots(-1)(m + n + 1)(m + n + 2)\cdots 2n}{1 \cdot 2 \cdots (n - m)(m + 1)(m + 2)\cdots n} = (-1)^{n-m}\frac{m!\,(2n)!}{n!\,(m + n)!}.$$

ξ^{n-m} hat daher den Koeffizienten $\dfrac{m!\,(2n)!}{2^{n-m}\,n!\,(m + n)!}$; der Koeffizient von ξ^{n-m} in $P_n^{(m)}(\xi)$ dagegen ist nach (1)

$$\frac{(2n)!\,n(n - 1)\cdots(n - m + 1)}{2^n(n!)^2} = \frac{(2n)!}{2^n\,n!\,(n - m)!},$$

also haben wir v_1 mit

$$\frac{(2n)!}{2^n\, n!\,(n-m)!}\;\frac{2^{n-m}\, n!\,(m+n)!}{m!\,(2n)!}=\frac{(m+n)!}{2^m\,(n-m)!\,m!}$$

zu multiplizieren, um $\mathfrak{P}_n^m(\xi)$ zu erhalten. Es ergibt sich somit

$$(6)\quad \mathfrak{P}_n^m(\xi)=\frac{(m+n)!}{2^m\,(n-m)!\,m!}\,(\xi^2-1)^{\frac{m}{2}}\,F\left(m-n,\; m+n+1,\; m+1,\; \frac{1-\xi}{2}\right).$$

14. Umformung der Differentialgleichung der Kugelfunktionen. Ähnlich wie in Ziffer (I·38) wollen wir auch die Differentialgleichung (8·2) umformen, d. h. wir setzen mit positivem $\sqrt{\xi^2-1}$ für $\xi>1$

$$(1)\qquad s=\left(\xi-\sqrt{\xi^2-1}\right)^2,$$

$$\sqrt{s}=\xi-\sqrt{\xi^2-1},\quad \frac{1}{\sqrt{s}}=\xi+\sqrt{\xi^2-1},$$

$$\xi=\frac{1}{2}\left(\sqrt{s}+\frac{1}{\sqrt{s}}\right),\quad \sqrt{\xi^2-1}=\frac{1-s}{2\sqrt{s}}.$$

$$\frac{ds}{d\xi}=\frac{4\,s^{\frac{3}{2}}}{s-1},\quad \frac{d^2s}{d\xi^2}=\frac{8\,s^2\,(s-3)}{(s-1)^3},$$

$$\frac{dw}{d\xi}=\frac{dw}{ds}\,\frac{4\,s^{\frac{3}{2}}}{s-1},\quad \frac{d^2w}{d\xi^2}=\frac{d^2w}{ds^2}\,\frac{16\,s^3}{(s-1)^2}+\frac{dw}{ds}\,\frac{8\,s^2\,(s-3)}{(s-1)^3};$$

daher geht (8·2) über in

$$(2)\quad s^2(1-s)\,\frac{d^2w}{ds^2}+s\left[\frac{1}{2}-m-\left(m+\frac{3}{2}\right)s\right]\frac{dw}{ds}$$
$$-\frac{1}{4}\,(n-m)\,(n+m+1)\,(1-s)\,w=0.$$

Nun setzen wir

$$(3)\qquad w=s^{\frac{1}{2}(m+n+1)}\,u,$$

dann wird aus der Differentialgleichung (2) nach leichter Rechnung

$$(4)\quad s(1-s)\,\frac{d^2u}{ds^2}+\left[\left(n+\frac{3}{2}\right)-\left(n+2m+\frac{5}{2}\right)s\right]\frac{du}{ds}$$
$$-\,(n+m+1)\left(m+\frac{1}{2}\right)u=0.$$

Das ist aber die hypergeometrische Differentialgleichung mit

$$a=m+\frac{1}{2},$$
$$b=m+n+1,$$
$$c=n+\frac{3}{2}.$$

Sie hat somit nach Ziffer 8 die Lösungen

$$(5)\qquad \begin{cases} u_1 = F\left(m+\frac{1}{2},\ m+n+1,\ n+\frac{3}{2},\ s\right), \\ u_2 = s^{-n-\frac{1}{2}} F\left(m-n,\ m+\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}-n,\ s\right); \end{cases}$$

daher ergeben sich für w die Lösungen

$$(6)\qquad \begin{cases} w_1 = s^{\frac{1}{2}(m+n+1)} F\left(m+\frac{1}{2},\ m+n+1,\ n+\frac{3}{2},\ s\right), \\ w_2 = s^{\frac{1}{2}(m-n)} F\left(m-n,\ m+\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}-n,\ s\right), \end{cases}$$

oder, wenn wir

$$(7)\qquad \zeta = \xi + \sqrt{\xi^2-1} = \frac{1}{\sqrt{s}}$$

einführen, für die Lösungen v der Differentialgleichung (8·1)

$$(8)\qquad \begin{cases} v_1 = \zeta^{-(n+m+1)}(\xi^2-1)^{\frac{m}{2}} F\left(m+\frac{1}{2},\ m+n+1,\ n+\frac{3}{2},\ \frac{1}{\zeta^2}\right), \\ v_2 = \zeta^{n-m}(\xi^2-1)^{\frac{m}{2}} F\left(m+\frac{1}{2},\ m-n,\ \frac{1}{2}-n,\ \frac{1}{\zeta^2}\right). \end{cases}$$

Die Reihen konvergieren für $|\zeta| > 1$. Beschränken wir uns auf die Werte von m und n, die für $\mathfrak{P}_n^m(\xi)$ und $\mathfrak{Q}_n^m(\xi)$ in Betracht kommen, so sehen wir, daß $v_1(\xi^2-1)^{-\frac{m}{2}}$ im Unendlichen von der Ordnung $\zeta^{-(n+m+1)}$ verschwindet, während $v_2(\xi^2-1)^{-\frac{m}{2}}$ dort von der Ordnung ζ^{n-m} unendlich wird; v_1 stimmt also gemäß Ziffer (I·43) bis auf einen konstanten Faktor mit $\mathfrak{Q}_n^m(\xi)$ überein. Es ist $a, b, c, > 0$, die Reihe bricht nicht ab. $\mathfrak{Q}_n(\xi)$ beginnt nach Potenzen von $\frac{1}{\xi}$ geordnet, gemäß (I, 33·2) mit $\frac{n!}{1\cdot 3\cdots(2n+1)}\frac{1}{\xi^{n+1}}$, $\mathfrak{Q}_n^{(m)}(\xi)$ daher mit

$$\frac{(-1)^m n!(n+1)(n+2)\cdots(n+m)}{1\cdot 3\cdots(2n+1)\xi^{n+m+1}} = \frac{(-1)^m 2^n n!(n+m)!}{(2n+1)!\,\xi^{n+m+1}},$$

die Reihe für $v_1(\xi^2-1)^{-\frac{m}{2}}$ wegen $\zeta = \xi + \sqrt{\xi^2-1} = 2\xi - \frac{1}{2\xi} + \cdots$ mit $\frac{1}{2^{n+m+1}\xi^{n+m+1}}$, somit ist

$$(9)\qquad \mathfrak{Q}_n^m(\xi) = (-1)^m 2^{2n+m+1}\frac{n!(n+m)!}{(2n+1)!}\zeta^{-(n+m+1)}(\xi^2-1)^{\frac{m}{2}} \times F\left(m+\frac{1}{2},\ m+n+1,\ n+\frac{3}{2},\ \frac{1}{\zeta^2}\right).$$

In der Reihe für v_2 ist c nicht ganz, dagegen b negativ ganz oder 0, sie bricht daher ab. v_2 hat somit keine logarithmischen Singularitäten und

ist infolgedessen nach (I·43) proportional $\mathfrak{P}_n^m(\xi)$. $P_n(\xi)$ beginnt, nach Potenzen von ξ geordnet, gemäß (I, 13·3) mit $\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{n!}\xi^n$, $P_n^{(m)}(\xi)$ daher mit

$$\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{(n-m)!}\xi^{n-m}=\frac{(2n)!\,\xi^{n-m}}{2^n n!\,(n-m)!},$$

die Reihe für $v_2(\xi^2-1)^{-\frac{m}{2}}$ mit $2^{n-m}\xi^{n-m}$, somit ist

(10) $$\mathfrak{P}_n^m(\xi)=\frac{(2n)!}{2^{2n-m}n!\,(n-m)!}\zeta^{n-m}(\xi^2-1)^{\frac{m}{2}}$$
$$\times F\left(m+\frac{1}{2},\ m-n,\ \frac{1}{2}-n,\ \frac{1}{\zeta^2}\right).$$

§ 3. Kugelfunktionen mit beliebigen Zeigern.

15. Doppelumlauf. Um zu einer Definition der Kugelfunktionen mit beliebigen Zeigern zu kommen, gehen wir von der Differentialgleichung (8·2) aus, wollen aber μ und ν an Stelle von m und n schreiben, um anzudeuten, daß es sich nicht um positive ganze Zahlen handelt, also von

(1) $$(1-z^2)\frac{d^2w}{dz^2}-2(\mu+1)z\frac{dw}{dz}+(\nu-\mu)(\nu+\mu+1)w=0.$$

Wir setzen, geleitet durch (I, 14·1),

(2) $$w=\int(t^2-1)^\nu(t-z)^{-\nu-\mu-1}dt$$

an, wobei das Integral wie in Ziffer 10 über eine noch zu wählende Kurve C_1 erstreckt werden soll. Dann ist

$$\frac{dw}{dz}=(\nu+\mu+1)\int(t^2-1)^\nu(t-z)^{-\nu-\mu-2}dt,$$
$$\frac{d^2w}{dz^2}=(\nu+\mu+1)(\nu+\mu+2)\int(t^2-1)^\nu(t-z)^{-\nu-\mu-3}dt,$$

somit

(3) $$(1-z^2)\frac{d^2w}{dz^2}-2(\mu+1)z\frac{dw}{dz}+(\nu-\mu)(\nu+\mu+1)w$$
$$=\int(t^2-1)^\nu(t-z)^{-\nu-\mu-3}[(\nu+\mu+1)(\nu+\mu+2)(1-z^2)$$
$$-2(\mu+1)(\nu+\mu+1)z(t-z)+(\nu-\mu)(\nu+\mu+1)(t-z)^2]\,dt$$
$$=(\nu+\mu+1)\int(t^2-1)^\nu(t-z)^{-\nu-\mu-3}[(\nu-\mu)t^2-2(\nu+1)tz+\nu+\mu+2]\,dt$$
$$=(\nu+\mu+1)\int(t^2-1)^{\nu+1}(t-z)^{-\nu-\mu-2}\left[\frac{2(\nu+1)t}{t^2-1}-\frac{\nu+\mu+2}{t-z}\right]dt$$
$$=(\nu+\mu+1)\int(t^2-1)^{\nu+1}(t-z)^{-\nu-\mu-2}\frac{d}{dt}\ln[(t^2-1)^{\nu+1}(t-z)^{-\nu-\mu-2}]\,dt$$
$$=(\nu+\mu+1)\int\frac{d}{dt}[(t^2-1)^{\nu+1}(t-z)^{-\nu-\mu-2}]\,dt$$
$$=(\nu+\mu+1)[(t^2-1)^{\nu+1}(t-z)^{-\nu-\mu-2}]_{\text{Anfang}}^{\text{Ende}}.$$

Der Integrationsweg C_1 sei die in Abb. 12 gezeichnete Kurve: Er beginnt in dem Punkte a der t-Ebene, der auf der die Punkte 1 und z verbindenden Strecke liegt, umkreist zuerst z und dann 1 im positiven, hierauf beide Punkte in derselben Reihenfolge im negativen Sinne und endigt wieder in a. Von den drei singulären Punkten ± 1, z des Integranden soll bei jeder Umkreisung nur der betreffende Punkt umlaufen, die beiden übrigen außerhalb liegen gelassen, die reelle Achse von -1 bis $-\infty$ nicht getroffen werden. Wir wollen einen solchen Weg als Doppelumlauf um die Punkte z und 1, ausgehend vom Punkte a, bezeichnen. Derartige Integrationswege wurden von POCHHAMMER[1]) eingeführt, zur Definition der Kugelfunktionen mit beliebigen Zeigern von HOBSON[2]) benützt. $(t^2-1)^{\nu+1}(t-z)^{-\nu-\mu-2}$ nimmt am Anfang und Ende des Weges denselben Wert an, das Integral (2) ist also infolge (3) Lösung der Differentialgleichung (1) und verschwindet wegen der Mehrdeutigkeit des Integranden nicht identisch, falls μ und ν keine ganzen Zahlen sind.

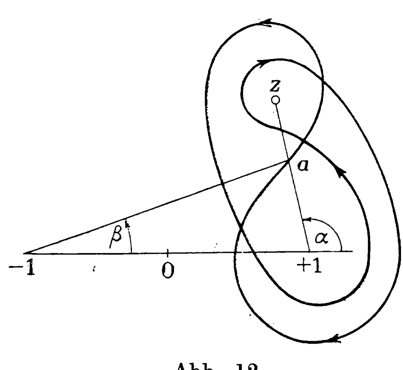


Abb. 12.

Wir haben nun die Zweige des im allgemeinen unendlich vieldeutigen Integranden anzugeben, die wir in (2) benützen wollen. Es sei

$$\begin{cases} -\pi < \operatorname{arc} z \leqq +\pi, \\ -\pi < \operatorname{arc}(z \pm 1) \leqq +\pi, \\ -\pi < \operatorname{arc}(a+1) \leqq +\pi, \end{cases}$$

also $\operatorname{arc}(z-1) = \alpha$, $\operatorname{arc}(a+1) = \beta$ (Abb. 12), ferner am Beginn und daher auch am Ende des Integrationsweges

$$\operatorname{arc}(t-1) = \alpha, \quad \operatorname{arc}(t+1) = \beta, \quad \operatorname{arc}(t-z) = \alpha - \pi.$$

Die im folgenden oft auftretende Funktion $(z^2-1)^{\frac{m}{2}}$ ist danach eindeutig in der längs der reellen Achse von 1 nach $-\infty$ aufgeschnittenen z-Ebene. Diese Festsetzungen über die Winkel von z und $z \pm 1$ sollen im folgenden immer beibehalten werden.

16. Berechnung der Integrale. Wir bilden nun die t-Ebene durch die Gleichung $t - z = (z-1)(u-1)$ auf die u-Ebene ab. Die Strecke $1z$

---

[1]) L. POCHHAMMER, Math. Ann. 45 (1890) 470, 495; 36 (1890) 84.

[2]) E. W. HOBSON, London Phil. Trans. 182 (1896) 443.

geht dabei in die Strecke 0 1, der Punkt a in einen Punkt a' dieser Strecke 0 1 über (Abb. 13). Aus der Kurve C_1 wird der in Abb. 13 gezeichnete Doppelumlauf C_1' um die Punkte 1 und 0. Ferner ist

$$t-1=(z-1)\,u, \quad t+1=(z-1)\,u+2,$$

somit am Anfang und Ende des Integrationsweges

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{arc} u = 0, \quad \operatorname{arc}(u-1) = -\pi.$$

Setzen wir $|z-1|<2$ voraus, so können wir bei festgehaltenem a bzw. a' die Kurven C_1 bzw. C_1' so eng um die Strecken $1z$ bzw. 0 1 zusammenziehen, daß auf den Wegen fortwährend

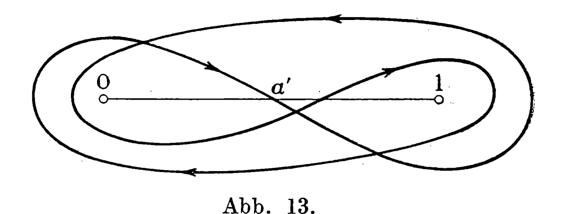


Abb. 13.

$$\left|\frac{z-1}{2}\,u\right|<1$$

und

$$|\operatorname{arc}(t+1)| = \left|\operatorname{arc}\left(1+\frac{z-1}{2}\,u\right)\right| < \pi$$

ist; dabei ändert sich das Integral nach dem CAUCHYschen Satz nicht. Z. B. können wir für C_1' den in Abb. 14 gezeichneten Weg annehmen; die Abbildung ist so zu verstehen, daß die zur reellen Achse parallelen Teile des Weges mit dieser zusammenfallen sollen und die übrigen kleine Kreise um die Punkte 0 und 1 sind.

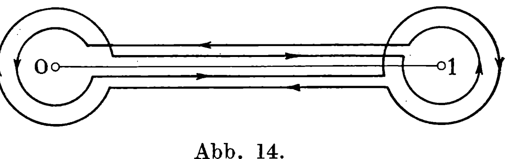


Abb. 14.

Damit ergibt sich die Entwicklung

$$\text{(2)} \qquad \int_{C_1} (t^2-1)^\nu (t-z)^{-\nu-\mu-1}\,dt$$

$$= (z-1)^{-\mu} \int_{C_1'} u^\nu\,[2+(z-1)\,u]^\nu\,(u-1)^{-\nu-\mu-1}\,du$$

$$= 2^\nu (z-1)^{-\mu} \int_{C_1'} u^\nu (u-1)^{-\nu-\mu-1} \left(1+\frac{z-1}{2}\,u\right)^\nu du$$

$$= 2^\nu (z-1)^{-\mu} \left[\int_{C_1'} u^\nu (u-1)^{-\nu-\mu-1}\,du\right.$$

$$\left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\nu(\nu-1)\cdots(\nu-n+1)}{n!} \left(\frac{z-1}{2}\right)^n \int_{C_1'} u^{\nu+n} (u-1)^{-\nu-\mu-1}\,du\right].$$

Wir wollen nun die Integrale unter der Voraussetzung

$$(3)\qquad \begin{cases} \Re(\nu+1) > 0, \\ \Re(-\nu-\mu) > 0 \end{cases}$$

auswerten. In Übereinstimmung mit (1) setzen wir $\operatorname{arc}(1-u) = 0$ in a' am Beginn von C_1'. Lassen wir die Halbmesser der kleinen Kreise um die Punkte 0 und 1 gegen Null streben, so konvergieren zufolge (3) wie in (I·16) die betreffenden Bestandteile der Integrale ebenfalls gegen Null, und es bleiben nur die über die geradlinigen Teile des Weges erstreckten Integrale übrig. Berücksichtigen wir noch die bei den Umläufen um die Punkte 0 und 1 auftretenden Änderungen der Winkel um 2π, so erhalten wir mit Hilfe von (7·1), (7·8), (4·1), (4·4)

$$(4)\qquad \int_{C_1'} u^{\nu+n}(u-1)^{-\nu-\mu-1}du = e^{i\pi(\nu+\mu+1)} \int_{C_1'} u^{\nu+n}(1-u)^{-\nu-\mu-1}du$$

$$= e^{i\pi(\nu+\mu+1)}\, B(\nu+n+1,\ -\nu-\mu)\,[1-e^{-2i\pi(\nu+\mu)} + e^{2i\pi(n-\mu)} - e^{2i\pi(\nu+n)}]$$

$$= e^{i\pi(\nu+n)}\,[e^{i\pi(\nu+n+1)} - e^{-i\pi(\nu+n+1)}]\,[e^{-i\pi(\nu+\mu)} - e^{i\pi(\nu+\mu)}]\,\frac{\Gamma(\nu+n+1)\,\Gamma(-\nu-\mu)}{\Gamma(n-\mu+1)}$$

$$= 4e^{i\pi(\nu+n)} \sin\pi(\nu+n+1)\sin\pi(\nu+\mu) \times \frac{(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+n)\,\Gamma(\nu+1)\,\Gamma(-\nu-\mu)}{(1-\mu)(2-\mu)\cdots(n-\mu)\,\Gamma(1-\mu)}$$

$$= 4e^{i\pi\nu}\sin\pi\nu\sin\pi\mu\,\frac{(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+n)\,\Gamma(\nu+1)\,\Gamma(\mu)}{(1-\mu)(2-\mu)\cdots(n-\mu)\,\Gamma(\nu+\mu+1)}$$

und

$$(5)\qquad \int_{C_1'} u^{\nu}(u-1)^{-\nu-\mu-1}\,du = 4e^{i\pi\nu}\sin\pi\nu\sin\pi\mu\,\frac{\Gamma(\nu+1)\,\Gamma(\mu)}{\Gamma(\nu+\mu+1)}\,.$$

Aus (2) wird daher mit (8·6)

$$(6)\qquad \int_{C_1} (t^2-1)^{\nu}(t-z)^{-\nu-\mu-1}\,dt$$

$$= 2^{2+\nu}e^{i\mu\nu}\sin\pi\nu\sin\pi\mu\,\frac{\Gamma(\nu+1)\,\Gamma(\mu)}{\Gamma(\nu+\mu+1)}(z-1)^{-\mu}\Bigg[1+ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-\nu)(-\nu+1)\cdots(-\nu+n-1)\,(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+n)}{n!\,(1-\mu)(2-\mu)\cdots(n-\mu)}\left(\frac{1-z}{2}\right)^n\Bigg]$$

$$= 2^{2+\nu}e^{i\pi\nu}\sin\pi\nu\sin\pi\mu\,\frac{\Gamma(\nu+1)\,\Gamma(\mu)}{\Gamma(\nu+\mu+1)}(z-1)^{-\mu}F\left(-\nu,\ \nu+1,\ 1-\mu,\ \frac{1-z}{2}\right).$$

Diese Gleichung gilt nach den Regeln der analytischen Fortsetzung, solange beide Seiten analytische Funktionen von ν, μ, z sind.

Für $\mu = 0$ ergibt sich wegen $\Gamma(\mu)\sin\mu\pi = \frac{\pi}{\Gamma(1-\mu)}$ und $\Gamma(1) = 1$

$$(7)\qquad \int_{C_1} (t^2-1)^{\nu}(t-z)^{-\nu-1}\,dt = 2^{2+\nu}\pi\, e^{i\pi\nu}\sin\pi\nu\, F\left(-\nu,\ \nu+1,\ 1,\ \frac{1-z}{2}\right).$$

17. Definition von $\mathfrak{P}_\nu^\mu(z)$ für beliebige Zeiger. Nach (13·6) ist für ganze $n \geqq 0$

$$P_n(z) = F\left(-n,\ n+1,\ 1,\ \frac{1-z}{2}\right).$$

Wir werden also $P_\nu(z)$ für beliebige ν, indem wir die Schreibweise von Magnus-Oberhettinger (M.-O., S. 75) verwenden, durch

$$(1)\qquad \mathfrak{P}_\nu(z) = \frac{e^{-i\pi\nu}}{2^{2+\nu}\pi\sin\pi\nu}\int\limits_{C_1}(t^2-1)^\nu (t-z)^{-\nu-1}\,dt$$

definieren, ferner $\mathfrak{P}_\nu^m(z)$ für beliebige ν und ganzzahlige $m \geqq 0$ wie in (I·43) durch

$$\mathfrak{P}_\nu^m(z) = (z^2-1)^{\frac{m}{2}}\,\mathfrak{P}_\nu^{(m)}(z).$$

Aus (1) und (4·1) folgt daraus mit $m = \mu$

$$(2)\qquad \mathfrak{P}_\nu^\mu(z) = \frac{e^{-i\pi\nu}}{2^{2+\nu}\pi\sin\pi\nu}\,\frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu+1)}\,(z^2-1)^{\frac{\mu}{2}}\int\limits_{C_1}(t^2-1)^\nu (t-z)^{-\nu-\mu-1}\,dt.$$

Diese Formel verwenden wir nach Hobson (H., S. 188) jetzt ebenso als Definition von $\mathfrak{P}_\nu^\mu(z)$ für beliebiges ν und μ. Weil das Integral der Differentialgleichung (15·1) genügt, ist $\mathfrak{P}_\nu^\mu(\xi)$ eine Lösung der Gleichung (8·1). Aus (2) erkennen wir auch, daß $\mathfrak{P}_\nu^\mu(z)$ analytische Funktion von ν, μ, z ist. Als Funktion von z ist $\mathfrak{P}_\nu^\mu(z)$ eindeutig gemäß Ziffer 15 in der längs der reellen Achse von 1 nach $-\infty$ aufgeschnittenen z-Ebene, für $z \leqq 1$ noch nicht definiert; die singulären Stellen sind ± 1 und ∞. Als Funktion von μ und ν soll $\mathfrak{P}_\nu^\mu(z)$ nicht näher untersucht werden.

Aus (2) und (8·6) erhalten wir mit (4·4)

$$(3)\qquad \mathfrak{P}_\nu^\mu(z) = \frac{1}{\Gamma(1-\mu)}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{\mu}{2}} F\left(-\nu,\ \nu+1,\ 1-\mu,\ \frac{1-z}{2}\right);$$

$\mathfrak{P}_\nu^\mu(z)$ stimmt also bis auf den Faktor $\frac{1}{\Gamma(1-\mu)}$ mit v_2 in (13·5) überein. $\mathfrak{P}_\nu(z)$ $(\mu = 0)$ ist gemäß (3) im Punkte 1 regulär. Ferner zeigt (3), daß $\mathfrak{P}_\nu^\mu(z)$ und $\mathfrak{P}_\nu^{-\mu}(z)$ linear unabhängig sind, wenn μ keine ganze Zahl ist.

Für ganzzahlige $\mu = m$ können wir den Integrationsweg C_1 in Formel (2) vereinfachen. Es sei nämlich I_1 der Wert von $\int (t^2-1)^\nu (t-z)^{-\nu-\mu-1}\,dt$, wenn wir längs einer Kurve integrieren, die von a ausgeht, den Punkt z im positiven Sinn umläuft, dabei die Punkte ± 1 nicht umschließt und nach a zurückkehrt. Am Beginn des Umlaufes in a soll derselbe Wert

genommen werden, den wir in Ziffer 15 beim Beginn des Weges C_1 in a vorgeschrieben haben. Ebenso sei I_2 der Wert des Integrals, wenn wir in entsprechender Weise den Punkt 1 umlaufen, dabei die Punkte -1 und z außerhalb liegen und am Beginn des Umlaufes in a wieder denjenigen Wert des Integranden wählen, welchen wir in Ziffer 15 am Beginn des Weges C_1 in a vorgeschrieben haben. Nach dem CAUCHYschen Satz ergibt sich dann

$$\int_{C_1} (t^2-1)^\nu (t-z)^{-\nu-\mu-1}\,dt = I_1 + I_2\, e^{-2i\pi(\mu+\nu)} - I_1 e^{2i\pi\nu} - I_2 .$$

Die Glieder der rechten Seite erhält man in folgender Weise: I_1 ist der Wert des Integrals, wenn man z im positiven Sinn umläuft. Würde gleich darauf der Punkt z im negativen Sinn umlaufen, so erhielte man $-I_1$; weil aber vorher noch der Punkt 1 im positiven Sinn umlaufen wurde, hat der Integrand noch den Faktor $e^{2i\pi\nu}$ angenommen. Ähnlich ist das letzte Glied zu erklären: Der positive Umlauf um 1 liefert $I_2\, e^{-2i\pi(\mu+\nu)}$, weil vorher der Punkt z im positiven Sinn umlaufen wurde. Bei sofort darauf folgendem negativen Umlauf des Punktes 1 würde man daher $-I_2\, e^{-2i\pi(\mu+\nu)}$ erhalten; weil aber vorher der Punkt z im negativen Sinn umlaufen wurde, hat der Integrand noch den Faktor $e^{2i\pi(\mu+\nu)}$ angenommen.

Ist $\mu = m$ eine ganze Zahl, so erhält man dafür

$$(I_1 + I_2\, e^{-2i\pi\nu})(1-e^{2i\pi\nu}) = -2i\,e^{i\pi\nu}\sin\pi\nu \int_{\bar C_1} (t^2-1)^\nu (t-z)^{-\nu-m-1}\,dt,$$

wobei $\bar C_1$ die beiden Punkte z und 1 im positiven Sinn einmal umkreist, den Punkt -1 nicht umschließt und für den Integranden am Beginn des Weges in a die früher vorgeschriebenen Werte zu nehmen sind. Für ganzzahlige m folgt daher aus (2)

$$(4)\qquad \mathfrak{P}_\nu^m(z) = \frac{1}{2^{1+\nu}\pi i}\,\frac{\Gamma(\nu+m+1)}{\Gamma(\nu+1)}\,(z^2-1)^{\frac{m}{2}} \int_{\bar C_1} (t^2-1)^\nu (t-z)^{-\nu-m-1}\,dt.$$

Ist auch $\nu = n \geqq 0$ eine ganze Zahl, so verschwindet I_2, und es genügt, in diesem Fall das Integral über eine den Punkt z im positiven Sinn umkreisende Kurve zu erstrecken, wobei der Anfangspunkt a jetzt beliebig ist. Damit haben wir (I, 19·1) erhalten, wenn wir noch (I, 18·2) und (I, 43·1) berücksichtigen.

Weil die hypergeometrische Reihe $F(a, b, c, z)$ in sich übergeht, wenn man a mit b vertauscht, folgt aus (3)

$$(5)\qquad \mathfrak{P}_\nu^\mu(z) = \mathfrak{P}_{-\nu-1}^\mu(z).$$

Ferner liefern (3) und (12·2)

$$\mathfrak{P}_\nu^\mu(z) = \frac{1}{\Gamma(1-\mu)}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{\mu}{2}}\left(\frac{1+z}{2}\right)^{-\mu} F\left(1-\mu+\nu,\ -\mu-\nu,\ 1-\mu,\ \frac{1-z}{2}\right)$$

oder

$$(6)\qquad \mathfrak{P}_\nu^{-\mu}(z) = \frac{(z^2-1)^{\frac{\mu}{2}}}{2^\mu\,\Gamma(1+\mu)} F\left(\mu+\nu+1,\ \mu-\nu,\ \mu+1,\ \frac{1-z}{2}\right).$$

v_1 in (13·5) stimmt also bis auf den Faktor $\frac{1}{2^\mu\,\Gamma(1+\mu)}$ mit $P_\nu^{-\mu}(\xi)$ überein. Schließlich ergibt (3) und (12·4)

$$\mathfrak{P}_\nu^\mu(z) = \frac{1}{\Gamma(1-\mu)}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{-\frac{\mu}{2}}\left(\frac{2}{z+1}\right)^{-\nu} F\left(-\nu,\ -\nu-\mu,\ 1-\mu,\ \frac{z-1}{z+1}\right).$$

Für die Konvergenz dieser Reihe ist natürlich $\left|\frac{z-1}{z+1}\right| < 1$, d. h. $\mathfrak{R}(z) > 0$ erforderlich.

18. Einfacher Umlauf. An Stelle des Integrationsweges C_1 wollen wir jetzt die in Abb. 15 gezeichnete Kurve C_2 wählen, die, ausgehend vom Punkte 0, zuerst den Punkt -1 im positiven und dann den Punkt $+1$ im negativen Sinne umschließt, aber z dabei immer außerhalb liegen läßt.

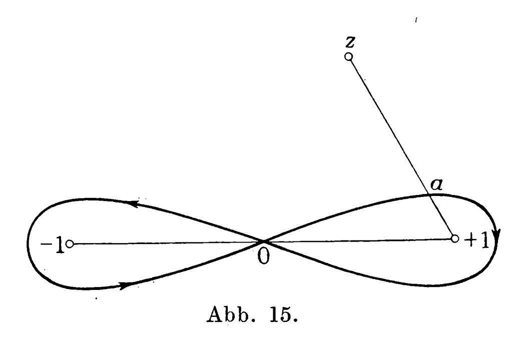


Abb. 15.

$(t^2-1)^{\nu+1}(t-z)^{-\nu-\mu-2}$ nimmt in 0 am Anfang und Ende des Weges denselben Wert an, (15·2) ist also auch in diesem Fall Lösung der Differentialgleichung (15·1).

Außer den Festsetzungen über die Winkel von z und $z \pm 1$ aus Ziffer 15, an denen wir immer festhalten wollen, schreiben wir vor:

$$\operatorname{arc}(t-1) = \pi,\quad \operatorname{arc}(t+1) = -2\pi \quad \text{in 0 am Beginn des Weges,}$$

$$\text{ferner}\quad \operatorname{arc}(t-z) = \operatorname{arc}(z-1) - \pi \quad \text{in } a \quad \text{und} \quad z-t = e^{i\pi}(t-z).$$

Nehmen wir noch $|z| > 1$ an, so können wir, ohne den Wert des Integrals zu ändern, die Kurve nach dem CAUCHYschen Satz so eng um die Strecke $(-1, +1)$ zusammenziehen, daß auf dem ganzen Weg $|t| < |z|$, $\left|\operatorname{arc}\left(1-\frac{t}{z}\right)\right| < \pi$ und C_2 spiegelbildlich in bezug auf den Punkt

0 ist. Denn nach unseren Festsetzungen ist arc $\left(1-\frac{t}{z}\right)$ durch den Winkel φ der Abb. 16 gegeben.

Damit wird

$$(1)\quad \int\limits_{C_2} (t^2-1)^\nu (t-z)^{-\nu-\mu-1}\,dt$$

$$= e^{i\pi(\nu+\mu+1)}\, z^{-(\nu+\mu+1)} \int\limits_{C_2} (t^2-1)^\nu \left(1-\frac{t}{z}\right)^{-\nu-\mu-1} dt$$

$$= e^{i\pi(\nu+\mu+1)}\, z^{-(\nu+\mu+1)} \left[\int\limits_{C_2} (t^2-1)^\nu\,dt\right.$$

$$\left. + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(-\nu-\mu-1)(-\nu-\mu-2)\cdots(-\nu-\mu-n)}{n!\,z^n} \int\limits_{C_2} (t^2-1)^\nu t^n\,dt\right].$$

Wegen der Symmetrie von C_2 in bezug auf den Punkt 0 verschwindet $\int\limits_{C_2} (t^2-1)^\nu t^n\,dt$ für ungerades n und ist gleich $2\int\limits_{C_2} (t^2-1)^\nu t^n\,dt$ für gerades n, wobei das letzte Integral über die rechte Hälfte der Kurve C_2 zu erstrecken ist, die den Punkt 1 umläuft. Auf diesem Wege nimmt

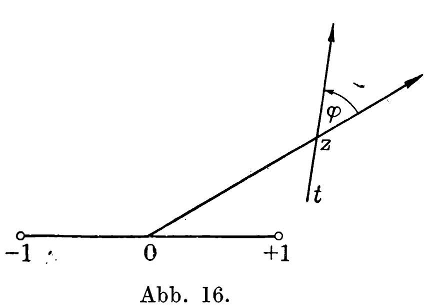


Abb. 16.

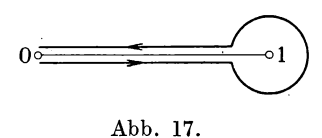


Abb. 17.

arc $(t-1)$ von $+\pi$ bis $-\pi$ ab. Durchlaufen wir diesen Weg in entgegengesetztem Sinne und nennen ihn dann C', so wird das Integral gleich $-\int\limits_{C'} (t^2-1)^\nu t^{2k}\,dt$, wobei jetzt arc (t^2-1) von $-\pi$ bis $+\pi$ zunimmt. Führen wir $u=t^2$ ein, so erhalten wir $-\int (u-1)^\nu u^{k-\frac{1}{2}}\,du$, wobei das Integral nach dem CAUCHYschen Satz z. B. über den Weg von Abb. 17 in der u-Ebene erstreckt werden kann. arc $(u-1)$ wächst dabei von $-\pi$ bis $+\pi$. Wie in Ziffer 16 strebt das Integral über den kleinen Kreis um den Punkt 1 mit dem Halbmesser des Kreises gegen Null, wenn wir $\Re(\nu) > -1$ voraussetzen, und es ergibt sich mit Rücksicht auf arc $(u-1)$ für die mit der Strecke 01 zusammenfallenden geradlinigen Bestandteile

$$B\left(k+\frac{1}{2},\ \nu+1\right)\left(-e^{-i\pi\nu}+e^{i\pi\nu}\right) = 2\,i\,\sin\pi\nu\,\frac{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)\Gamma(\nu+1)}{\Gamma\left(\nu+k+\frac{3}{2}\right)}.$$

(1), (4·1), (4·4), (4·5), (8·6) liefern dann

$$(2)\quad \int_{C_2} (t^2-1)^\nu (t-z)^{-\nu-\mu-1}\, dt$$

$$= \frac{2\, i \sin \pi\nu\, e^{i\pi(\nu+\mu+1)}\, \Gamma(\nu+1)\, \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right) z^{\nu+\mu+1}} \left[1+\right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\nu+\mu+1)(\nu+\mu+2)\cdots(\nu+\mu+2k)\, \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\left(k-\frac{1}{2}\right)}{(2k)!\left(\nu+\frac{3}{2}\right)\left(\nu+\frac{5}{2}\right)\cdots\left(\nu+k+\frac{1}{2}\right) z^{2k}}\right]$$

$$= \frac{2\, i \sin \pi\nu\, e^{i\pi(\nu+\mu+1)}\, \Gamma(\nu+1)\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right) z^{\nu+\mu+1}} \left[1+\right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{\nu+\mu}{2}+1\right)\left(\frac{\nu+\mu}{2}+2\right)\cdots\left(\frac{\nu+\mu}{2}+k\right)\frac{\nu+\mu+1}{2}\left(\frac{\nu+\mu+1}{2}+1\right)\cdots\left(\frac{\nu+\mu+1}{2}+k-1\right)}{k!\left(\nu+\frac{3}{2}\right)\left(\nu+\frac{5}{2}\right)\cdots\left(\nu+k+\frac{1}{2}\right) z^{2k}}\right]$$

$$= \frac{2\sqrt{\pi}\, i\, e^{i\pi(\nu+\mu+1)} \sin \pi\nu\, \Gamma(\nu+1)}{\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right) z^{\nu+\mu+1}} F\left(\frac{\nu+\mu}{2}+1,\ \frac{\nu+\mu+1}{2},\ \nu+\frac{3}{2},\ \frac{1}{z^2}\right)$$

und für $\mu = 0$

$$(3)\quad \int_{C_2} (t^2-1)^\nu (t-z)^{-\nu-1}\, dt$$

$$= \frac{2\sqrt{\pi}\, i\, e^{i\pi(\nu+1)} \sin \pi\nu\, \Gamma(\nu+1)}{\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right) z^{\nu+1}} F\left(\frac{\nu}{2}+1,\ \frac{\nu+1}{2},\ \nu+\frac{3}{2},\ \frac{1}{z^2}\right).$$

Die Gleichungen gelten, solange jeweils beide Seiten analytische Funktionen von ν, μ, z sind.

19. Definition von $\mathfrak{Q}_\nu^\mu(z)$ für beliebige Zeiger. Nach (13·2) ist für positives ganzzahliges n mit Hilfe von (4·3) und (4·1)

$$(1)\quad \mathfrak{Q}_n(z) = \frac{n!}{1\cdot 3\cdots(2n+1)\, z^{n+1}} F\left(\frac{n+1}{2},\ \frac{n}{2}+1,\ n+\frac{3}{2},\ \frac{1}{z^2}\right)$$

$$= \frac{\Gamma(n+1)}{2^{n+1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\left(n+\frac{1}{2}\right) z^{n+1}} F\left(\frac{n}{2}+1,\ \frac{n+1}{2},\ n+\frac{3}{2},\ \frac{1}{z^2}\right)$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(n+1)}{2^{n+1}\,\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right) z^{n+1}} F\left(\frac{n}{2}+1,\ \frac{n+1}{2},\ n+\frac{3}{2},\ \frac{1}{z^2}\right).$$

Wir werden also mit Rücksicht auf (18·3) und (4·5) für beliebiges ν definieren

$$(2) \qquad \mathfrak{Q}_\nu(z) = \frac{e^{-i\pi(\nu+1)}}{2^{2+\nu} i \sin \pi\nu} \int_{C_2} (t^2-1)^\nu (t-z)^{-\nu-1}\, dt$$

und danach im Einklang mit (I, 43·1) für positives ganzzahliges m

$$\mathfrak{Q}_\nu^m(z) = \frac{e^{-i\pi(\nu+1)}}{2^{2+\nu} i \sin \pi\nu} (z^2-1)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dz^m} \int_{C_2} (t^2-1)^\nu (t-z)^{-\nu-1}\, dt$$

oder mit Verwendung von (4·1) und $\mu = m$

$$(3) \qquad \mathfrak{Q}_\nu^\mu(z) = \frac{e^{-i\pi(\nu+1)}}{2^{2+\nu} i \sin \pi\nu} \frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu+1)} (z^2-1)^{\frac{\mu}{2}} \int_{C_2} (t^2-1)^\nu (t-z)^{-\nu-\mu-1}\, dt.$$

Formel (3) benützen wir nach HOBSON (H., S. 195) jetzt, um $\mathfrak{Q}_\nu^\mu(z)$ für beliebige Zeiger zu definieren, ähnlich wie wir (17·2) zur Definition von $\mathfrak{P}_\nu^\mu(z)$ verwendet haben. Das Integral genügt der Differentialgleichung (15·1), also ist $\mathfrak{Q}_\nu^\mu(z)$ Lösung der Gleichung (8·1). Zufolge (3) ist $\mathfrak{Q}_\nu^\mu(z)$ analytische Funktion von ν, μ, z, und zwar gemäß Ziffer 15 eindeutig in bezug auf z in der längs der reellen Achse von 1 nach $-\infty$ aufgeschnittenen Ebene, noch nicht definiert für $z \leqq 1$; die singulären Stellen sind ± 1 und ∞. Als Funktion von ν und μ soll es nicht näher untersucht werden.

Wenn $\Re(\nu+1) > 0$ ist, können wir den Weg C_2 nach dem Vorbild von Ziffer 16 und 18 auf die Strecke $(-1, +1)$ zusammenziehen; die Integrale über die kleinen Kreise um die Punkte ± 1 streben mit den Halbmessern dieser Kreise wegen $\Re(\nu+1) > 0$ gegen Null, und es bleibt gemäß den Festsetzungen von Ziffer 18 über die Winkel

$$\int_{C_2} (t^2-1)^\nu (t-z)^{-\nu-\mu-1}\, dt = (-e^{-i\pi\nu} + e^{i\pi\nu}) \int_{-1}^{+1} (1-t^2)^\nu (t-z)^{-\nu-\mu-1}\, dt$$
$$= 2i \sin \pi\nu \int_{-1}^{+1} (1-t^2)^\nu (t-z)^{-\nu-\mu-1}\, dt,$$

infolgedessen

$$\mathfrak{Q}_\nu^\mu(z) = \frac{e^{-i\pi(\nu+1)}}{2^{1+\nu}} \frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu+1)} (z^2-1)^{\frac{\mu}{2}} \int_{-1}^{+1} (1-t^2)^\nu (t-z)^{-\nu-\mu-1}\, dt$$
$$= \frac{e^{i\pi\mu}}{2^{1+\nu}} \frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu+1)} (z^2-1)^{\frac{\mu}{2}} \int_{-1}^{+1} (1-t^2)^\nu (z-t)^{-\nu-\mu-1}\, dt.$$

Damit ist die Formel von SCHLÄFLI (I, 34·1) auf $m \neq 0$ und beliebige n verallgemeinert.

(18·2) und (3) geben

(4) $$\mathfrak{Q}_\nu^\mu(z) = \frac{\sqrt{\pi}\, e^{i\pi\mu}}{2^{1+\nu}} \frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)} \frac{(z^2-1)^{\frac{\mu}{2}}}{z^{\nu+\mu+1}} F\left(\frac{\nu+\mu}{2}+1,\ \frac{\nu+\mu+1}{2},\ \nu+\frac{3}{2},\ \frac{1}{z^2}\right),$$

sonach mit Hilfe von (12·2)

(5) $$\mathfrak{Q}_\nu^\mu(z) = \frac{\sqrt{\pi}\, e^{i\pi\mu}}{2^{1+\nu}} \frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)} (z^2-1)^{-\frac{\mu}{2}} z^{-(\nu-\mu+1)} F\left(\frac{\nu-\mu}{2}+1,\ \frac{\nu-\mu+1}{2},\ \nu+\frac{3}{2},\ \frac{1}{z^2}\right),$$

daher aus (4) und (5), wenn wir μ durch $-\mu$ in (5) ersetzen,

(6) $$\frac{e^{-i\pi\mu}\,\mathfrak{Q}_\nu^\mu(z)}{\Gamma(\nu+\mu+1)} = \frac{e^{i\pi\mu}\,\mathfrak{Q}_\nu^{-\mu}(z)}{\Gamma(\nu-\mu+1)}.$$

Wie sich aus den Formeln dieser Ziffer und Ziffer 4 ergibt, ist $\mathfrak{Q}_\nu^\mu(z)$ nicht definiert, wenn $\mu+\nu$ eine negative ganze Zahl ist.

20. Neuer Doppelumlauf. Nachdem wir in den Ziffern 15 und 18 den Integrationsweg um die Punkte 1 und z bzw. -1 und $+1$ herumgeführt haben, wollen wir ihn auch noch um die Punkte -1 und z in einem Doppelumlauf herumführen, den Punkt $+1$ immer außerhalb lassen, dabei aber die beiden Fälle $\Re\left(\frac{z}{i}\right) \gtrless 0$ getrennt behandeln (Abb. 18, 19).

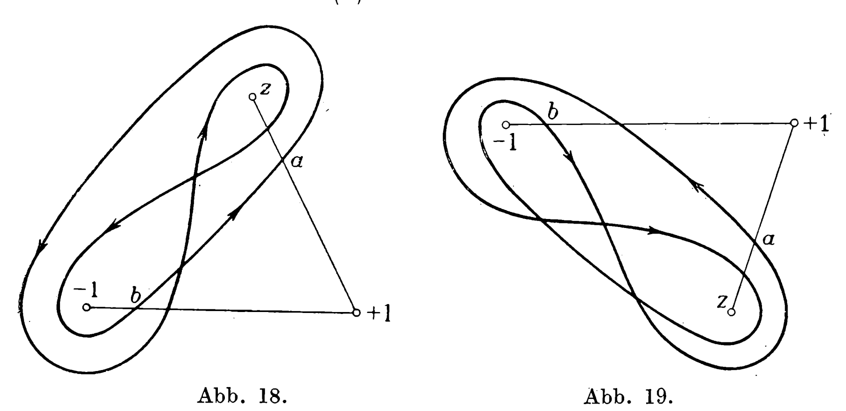


Abb. 18. Abb. 19.

Die Festsetzungen von Ziffer 15 über die Winkel von z, $z \pm 1$, $a+1$, $t \pm 1$ und $t-z$ werden beibehalten, die z-Ebene ist längs der reellen Achse von 1 nach $-\infty$ aufgeschnitten. Der Weg C_3^+ von Abb. 18 für $\Re\left(\frac{z}{i}\right) > 0$ läßt sich also nicht stetig in den Weg C_3^- von Abb. 19 für $\Re\left(\frac{z}{i}\right) < 0$ überführen, da z die reelle Achse nur rechts von 1 überschreiten kann. Die Integration möge jedesmal in einem Punkte b der

Strecke $(-1, +1)$ beginnen und endigen. Aus ähnlichen Gründen wie in Ziffer 15 und 18 ist (15·2) wieder Lösung der Differentialgleichung (15·1). Aus den Festsetzungen von Ziffer 15 über die Winkel in a folgt:

$$\operatorname{arc}(t-1) = \begin{cases} +\pi & \text{für } C_3^+ \text{ in } b \text{ am Beginn} \\ -\pi & \text{für } C_3^- \;\;\text{,, ,, ,, ,,} \end{cases}$$

$$\operatorname{arc}(t+1) = 0 \qquad \text{für } C_3^\pm \text{ in } b \text{ am Beginn.}$$

Wir bilden nun die t-Ebene durch die Gleichung $t+1=(z+1)\,u$ auf die u-Ebene ab. Damit gehen die Kurven $C_3^\pm$ in einen Doppelumlauf C_3' um die Punkte 0 und 1 über. Man erhält

$$\frac{t-1}{2} = \frac{z+1}{2}u - 1$$

und

$$t - z = (z+1)(u-1).$$

Setzen wir

$$\frac{z+1}{2}u - 1 = e^{\pm\pi i}\left(1 - \frac{z+1}{2}u\right)$$

entsprechend den beiden Fällen $\Re\left(\frac{z}{i}\right) \gtrless 0$, so ist gemäß unserer Festsetzung $\operatorname{arc}\left(1-\frac{z+1}{2}u\right) = 0$ am Beginn von C_3', und wir können unter der Voraussetzung $|z+1| < 2$ nach dem CAUCHYschen Satz den Integrationsweg C_3' so eng um die Strecke 01 zusammenziehen, daß er z. B. in den Weg von Abb. 14 übergeht und auf ihm fortwährend $\left|\frac{z+1}{2}u\right| < 1$ und $\left|\operatorname{arc}\left(1-\frac{z+1}{2}u\right)\right| < \pi$ bleibt.

Damit erhalten wir

$$(1)\quad \int\limits_{C_3^\pm} (t^2-1)^\nu (t-z)^{-\nu-\mu-1}\,dt$$

$$= 2^\nu e^{\pm i\pi\nu}(z+1)^{-\mu}\int\limits_{C_3'} u^\nu (u-1)^{-\nu-\mu-1}\left(1-\frac{z+1}{2}u\right)^\nu du$$

$$= 2^\nu e^{\pm i\pi\nu}(z+1)^{-\mu}\left[\int\limits_{C_3'} u^\nu (u-1)^{-\nu-\mu-1}\,du\right.$$

$$\left.+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\nu(\nu-1)\cdots(\nu-n+1)}{n!}\left(\frac{z+1}{2}\right)^n\int\limits_{C_3'} u^{\nu+n}(u-1)^{-\nu-\mu-1}\,du\right].$$

Die Verbiegung von C_3' in den Weg von Abb. 14 bedeutet ein entsprechendes Zusammenziehen von $C_3^\pm$ auf die Strecke $(-1, z)$. Dadurch wird am Beginn (also zwischen -1 und z) $\operatorname{arc}(t+1) = \operatorname{arc}(z+1)$, d. h. $\operatorname{arc} u = 0$ und $\operatorname{arc}(u-1) = \operatorname{arc}(t-z) - \operatorname{arc}(z+1) = -\pi$. Setzen wir noch $\Re(\nu+1) > 0$ und $\Re(-\nu-\mu) > 0$ voraus, so liegen zur Berechnung der

Integrale in der eckigen Klammer von (1) dieselben Verhältnisse vor wie in Ziffer 16. Vergleicht man also (1) mit (16·2), so liefert (16·6)

$$(2)\qquad \int_{C_3^+} (t^2-1)^\nu (t-z)^{-\nu-\mu-1}\,dt$$

$$= 2^{2+\nu} e^{2i\pi\nu} \sin\pi\nu \sin\pi\mu \frac{\Gamma(\nu+1)\,\Gamma(\mu)}{\Gamma(\nu+\mu+1)} (z+1)^{-\mu} F\left(-\nu, \nu+1, 1-\mu, \frac{1+z}{2}\right).$$

Beim Integrationsweg C_3^- ist der Faktor $e^{2i\pi\nu}$ auszulassen. Die Gleichung gilt, solange beide Seiten analytische Funktionen von ν, μ, z sind.

21. Beziehungen zwischen den Integralen längs der drei Wege. Um die Beziehungen zwischen den Integralen längs der drei Wege C_1, C_2, $C_3^\pm$ aufzufinden, erstrecken wir $\int (t^2-1)^\nu (t-z)^{-\nu-\mu-1}\,dt$ längs der drei von 0 ausgehenden und dort endigenden Kurven um die Punkte $+1$, -1, z von Abb. 20, wobei immer einer der Punkte umlaufen und die beiden anderen außerhalb liegengelassen werden sollen. Wir nennen die Werte der drei Integrale I_1, I_2, I_3 und schreiben dabei außer den früheren Festsetzungen über die Winkel von z und $z\pm 1$ von Ziffer 15 in 0 am Beginn der Integration vor:

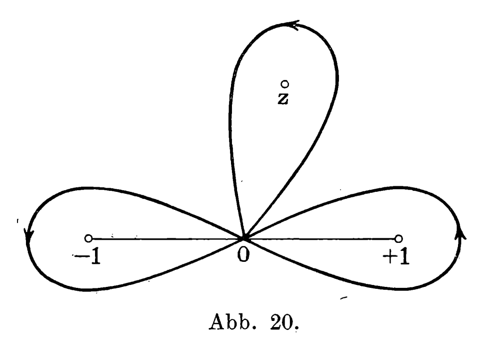


Abb. 20.

$$\operatorname{arc}(t-1) = \pm\pi \quad \text{für} \quad \Re\left(\frac{z}{i}\right) \gtrless 0$$

$$\operatorname{arc}(t+1) = 0$$

$$\operatorname{arc}(t-z) = \operatorname{arc} z - \pi.$$

Der CAUCHYsche Integralsatz liefert danach wie in Ziffer 17 durch geeignetes Verbiegen der Wege gemäß den Festsetzungen über Winkel in den Ziffern 15, 18, 20:

$$\int_{C_1} = I_3 + I_1 e^{-2i\pi(\nu+\mu+1)} - I_3 e^{2i\pi\nu} - I_1,$$

$$\int_{C_2} = \begin{cases} I_2 e^{-2i\pi\nu} - I_1 e^{-2i\pi\nu} \\ I_2 - I_1 \end{cases} \quad \text{für} \quad \Re\left(\frac{z}{i}\right) \gtrless 0,$$

$$\int_{C_3^\pm} = I_3 + I_2 e^{-2i\pi(\nu+\mu+1)} - I_3 e^{2i\pi\nu} - I_2 \quad \text{für} \quad \Re\left(\frac{z}{i}\right) \gtrless 0.$$

Daraus folgt

$$(1)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{C_2} = \frac{e^{-2i\pi\nu}\left(\int_{C_1} - \int_{C_3^+}\right)}{1-e^{-2i\pi(\mu+\nu)}}, \\[2ex] \displaystyle\int_{C_2} = \frac{\int_{C_1} - \int_{C_3^-}}{1-e^{-2i\pi(\mu+\nu)}}. \end{cases}$$

(19·3) liefert daher für $\Re\left(\frac{z}{i}\right) \gtrless 0$

$$(2)\qquad \mathfrak{Q}_\nu^\mu(z) = \frac{e^{-i\pi(\nu+1)}}{2^{2+\nu}i\sin\pi\nu} \cdot \frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu+1)} \frac{e^{i\pi(\mu\mp\nu)}}{2i\sin\pi(\mu+\nu)}(z^2-1)^{\frac{\mu}{2}}\left(\int_{C_1} - \int_{C_3^\pm}\right)$$

oder mit Hilfe von (16·6) und (20·2), wenn wir $|1 \pm z| < 2$ voraussetzen,

$$\mathfrak{Q}_\nu^\mu(z) = \frac{e^{i\pi(\mu\mp\nu)}\sin\pi\mu}{2\sin\pi(\mu+\nu)}\Gamma(\mu)\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{\mu}{2}} F\left(-\nu,\ \nu+1,\ 1-\mu,\ \frac{1-z}{2}\right)$$
$$- \frac{e^{i\pi\mu}\sin\pi\mu}{2\sin\pi(\mu+\nu)}\Gamma(\mu)\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{\frac{\mu}{2}} F\left(-\nu,\ \nu+1,\ 1-\mu,\ \frac{1+z}{2}\right).$$

Beachten wir noch (4·4), so ergibt sich für $\Re\left(\frac{z}{i}\right) \gtrless 0$

$$(3)\qquad \mathfrak{Q}_\nu^\mu(z) = \frac{\pi e^{i\pi\mu}}{2\sin\pi(\mu+\nu)\,\Gamma(1-\mu)}\left[e^{\mp i\pi\nu}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{\mu}{2}} F\left(-\nu,\ \nu+1,\ 1-\mu,\ \frac{1-z}{2}\right)\right.$$
$$\left. - \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{\frac{\mu}{2}} F\left(-\nu,\ \nu+1,\ 1-\mu,\ \frac{1+z}{2}\right)\right].$$

22. Beziehungen zwischen $\mathfrak{P}_\nu^\mu(z)$ und $\mathfrak{Q}_\nu^\mu(z)$. Wir ersetzen in der letzten Formel der vorigen Ziffer ν durch $-(\nu+1)$; es ergibt sich

$$(1)\qquad \mathfrak{Q}_{-\nu-1}^\mu(z) = \frac{\pi e^{i\pi\mu}}{2\sin\pi(\mu-\nu)\,\Gamma(1-\mu)}\left[e^{\pm i\pi\nu}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{\mu}{2}} F\left(\nu+1,\ -\nu,\ 1-\mu,\ \frac{1-z}{2}\right)\right.$$
$$\left. + \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{\frac{\mu}{2}} F\left(\nu+1,\ -\nu,\ 1-\mu,\ \frac{1+z}{2}\right)\right],$$

daher nach (21·3), (1) und (17·3)

$$\mathfrak{Q}_\nu^\mu(z)\sin\pi(\mu+\nu) + \mathfrak{Q}_{-\nu-1}^\mu(z)\sin\pi(\mu-\nu)$$
$$= \frac{\pi e^{i\pi\mu}}{2\Gamma(1-\mu)}(e^{i\pi\nu} + e^{-i\pi\nu})\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{\mu}{2}} F\left(-\nu,\ \nu+1,\ 1-\mu,\ \frac{1-z}{2}\right)$$
$$= \pi e^{i\pi\mu}\cos\pi\nu\,\mathfrak{P}_\nu^\mu(z)$$

oder

(2) $$\mathfrak{P}_\nu^\mu(z) = \frac{e^{-i\pi\mu}}{\pi \cos \pi\nu} [\mathfrak{Q}_\nu^\mu(z) \sin \pi(\mu+\nu) - \mathfrak{Q}_{-\nu-1}^\mu(z) \sin \pi(\nu-\mu)],$$

somit für $\mu = 0$

(3) $$\mathfrak{P}_\nu(z) = \frac{\operatorname{tg} \nu\pi}{\pi} [\mathfrak{Q}_\nu(z) - \mathfrak{Q}_{-\nu-1}(z)].$$

Aus (2), (19·6) und (4·4) folgt

(4) $$\mathfrak{P}_\nu^{-\mu}(z) = \frac{e^{i\pi\mu}}{\pi \cos \nu\pi} [\mathfrak{Q}_\nu^{-\mu}(z) \sin \pi(\nu-\mu) - \mathfrak{Q}_{-\nu-1}^{-\mu}(z) \sin \pi(\nu+\mu)]$$

$$= \frac{e^{-i\pi\mu}}{\pi \cos \nu\pi} \left[\frac{\Gamma(\nu-\mu+1)}{\Gamma(\nu+\mu+1)} \mathfrak{Q}_\nu^\mu(z) \sin \pi(\nu-\mu) - \frac{\Gamma(-\nu-\mu)}{\Gamma(-\nu+\mu)} \mathfrak{Q}_{-\nu-1}^\mu(z) \sin \pi(\nu+\mu)\right]$$

$$= \frac{e^{-i\pi\mu}}{\pi \cos \nu\pi} \frac{\Gamma(\nu-\mu+1)}{\Gamma(\nu+\mu+1)} \sin \pi(\nu-\mu) [\mathfrak{Q}_\nu^\mu(z) - \mathfrak{Q}_{-\nu-1}^\mu(z)]$$

$$= \frac{\Gamma(\nu-\mu+1)}{\Gamma(\nu+\mu+1)} \left\{\mathfrak{P}_\nu^\mu(z) - \frac{e^{-i\pi\mu}}{\pi \cos \nu\pi} \mathfrak{Q}_\nu^\mu(z) [\sin \pi(\nu+\mu) - \sin \pi(\nu-\mu)]\right\}$$

$$= \frac{\Gamma(\nu-\mu+1)}{\Gamma(\nu+\mu+1)} \left[\mathfrak{P}_\nu^\mu(z) - \frac{2}{\pi} e^{-i\pi\mu} \sin \pi\mu\, \mathfrak{Q}_\nu^\mu(z)\right],$$

sonach für ganzzahlige $\mu = m$

(5) $$\mathfrak{P}_\nu^{-m}(z) = \frac{\Gamma(\nu-m+1)}{\Gamma(\nu+m+1)} \mathfrak{P}_\nu^m(z)$$

und für ganzzahlige $n \geqq m \geqq 0$ nach (4·3)

(6) $$\mathfrak{P}_n^{-m}(z) = \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \mathfrak{P}_n^m(z).$$

Da gemäß Übereinkunft die Winkel von $\pm z$, $\pm (z-1)$, $\pm (z+1)$ dem Betrage nach π nicht übersteigen sollen (die z-Ebene wurde ja längs der reellen Achse von 1 nach $-\infty$ aufgeschnitten), haben wir

$$\begin{cases} -z = e^{\mp i\pi} z \\ -(z-1) = e^{\mp i\pi}(z-1) \\ -(z+1) = e^{\mp i\pi}(z+1) \end{cases}$$

für $\Re\left(\frac{z}{i}\right) \gtrless 0$ zu setzen, daher ist nach (17·3) und (21·3)

(7) $$\mathfrak{P}_\nu^\mu(-z) = \frac{1}{\Gamma(1-\mu)} \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{\frac{\mu}{2}} F\left(-\nu, \nu+1, 1-\mu, \frac{1+z}{2}\right)$$

$$= e^{\mp i\pi\nu} \mathfrak{P}_\nu^\mu(z) - \frac{2}{\pi} e^{-i\pi\mu} \sin \pi(\mu+\nu)\, \mathfrak{Q}_\nu^\mu(z)$$

für $\Re\left(\frac{z}{i}\right) \gtrless 0$. (19·4) liefert ebenso für $\Re\left(\frac{z}{i}\right) \gtrless 0$

(8) $$\mathfrak{Q}_\nu^\mu(-z) = -e^{\pm i\pi\nu} \mathfrak{Q}_\nu^\mu(z),$$

da sich $(z^2-1)^{\frac{\mu}{2}} = (z+1)^{\frac{\mu}{2}}(z-1)^{\frac{\mu}{2}}$ beim Übergang von z zu $-z$ nach dem Obigen mit $e^{-\frac{i\pi\mu}{2}} \cdot e^{-\frac{i\pi\mu}{2}} = e^{-i\pi\mu}$ multipliziert.

23. Definition von $P_\nu^\mu(z)$ und $Q_\nu^\mu(z)$ für $-1 < z < +1$. Wir berechnen die Grenzwerte, denen $\mathfrak{P}_\nu^\mu(z)$ zustrebt, wenn sich z einem Wert $-1 < z < +1$ auf der oberen bzw. unteren Halbebene unbegrenzt nähert. Man hat in diesem Fall nach den Festsetzungen über die Winkel $z-1 = e^{\pm i\pi}(1-z)$ für $\mathfrak{R}\left(\frac{z}{i}\right) \gtrless 0$, daher gemäß (17·3) für $-1 < z < +1$ und $h > 0$

$$(1)\qquad \lim_{h\to 0} \mathfrak{P}_\nu^\mu(z \pm hi) = \frac{e^{\mp\frac{i\pi\mu}{2}}}{\Gamma(1-\mu)}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\frac{\mu}{2}} F\left(-\nu,\ \nu+1,\ 1-\mu,\ \frac{1-z}{2}\right),$$

somit

$$(2)\qquad e^{\frac{i\pi\mu}{2}} \lim_{h\to 0} \mathfrak{P}_\nu^\mu(z+hi) = e^{-\frac{i\pi\mu}{2}} \lim_{h\to 0} \mathfrak{P}_\nu^\mu(z-hi)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\mu)}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\frac{\mu}{2}} F\left(-\nu,\ \nu+1,\ 1-\mu,\ \frac{1-z}{2}\right).$$

Hobson (H., S. 227) verwendet (2) als Definition für $P_\nu^\mu(z)$, wenn $-1 < z < +1$ ist, weil dann $P_\nu^\mu(z)$ in diesem Intervall bei reellen Zeigern reell ist. Wenn $\nu = n$ und $\mu = m$ ganze Zahlen sind und $n \geqq m \geqq 0$ ist, so stimmt diese Definition mit der von (I, 43·3) überein. Für $m = 0$ und beliebiges ν hat man $P_\nu(z) = \mathfrak{P}_\nu(z)$ nach (2).

Aus (21·3) erhält man in ähnlicher Weise für $-1 < z < +1$

$$(3)\qquad \lim_{h\to 0} \mathfrak{Q}_\nu^\mu(z \pm hi)$$

$$= \frac{\pi e^{i\pi\mu}}{2\sin\pi(\mu+\nu)\,\Gamma(1-\mu)}\left[e^{\mp i\pi\left(\nu+\frac{\mu}{2}\right)}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\frac{\mu}{2}} F\left(-\nu,\ \nu+1,\ 1-\mu,\ \frac{1-z}{2}\right)\right.$$

$$\left. - e^{\pm\frac{i\pi\mu}{2}}\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^{\frac{\mu}{2}} F\left(-\nu,\ \nu+1,\ 1-\mu,\ \frac{1+z}{2}\right)\right],$$

hiernach

$$e^{-\frac{i\pi\mu}{2}} \lim_{h\to 0} \mathfrak{Q}_\nu^\mu(z+hi) - e^{\frac{i\pi\mu}{2}} \lim_{h\to 0} \mathfrak{Q}_\nu^\mu(z-hi)$$

$$= \frac{\pi e^{i\pi\mu}\left[e^{-i\pi(\nu+\mu)} - e^{i\pi(\nu+\mu)}\right]}{2\sin\pi(\mu+\nu)\,\Gamma(1-\mu)}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\frac{\mu}{2}} F\left(-\nu,\ \nu+1,\ 1-\mu,\ \frac{1-z}{2}\right).$$

Verwenden wir hier die Definition (2) von $P_\nu^\mu(z)$ für $-1 < z < +1$, so folgt für diese Werte von z

$$(4)\qquad e^{-\frac{i\pi\mu}{2}} \lim_{h\to 0} \mathfrak{Q}_\nu^\mu(z+hi) - e^{\frac{i\pi\mu}{2}} \lim_{h\to 0} \mathfrak{Q}_\nu^\mu(z-hi) = -i\pi e^{i\pi\mu} P_\nu^\mu(z).$$

Hobson (H., S. 229) definiert $Q_\nu^\mu(z)$ für $-1 < z < +1$ durch

$$(5)\qquad e^{i\pi\mu} Q_\nu^\mu(z) = \frac{1}{2}\left[e^{-\frac{i\pi\mu}{2}} \lim_{h\to 0} \mathfrak{Q}_\nu^\mu(z+hi) + e^{\frac{i\pi\mu}{2}} \lim_{h\to 0} \mathfrak{Q}_\nu^\mu(z-hi)\right].$$

Diese Definition stimmt für $\mu = 0$ und ganzes $\nu = n \geqq 0$ mit der von (I, 32·10) überein. Aus (4) und (5) folgt für $-1 < z < +1$

$$(6)\qquad e^{\mp\frac{i\pi\mu}{2}} \lim_{h\to 0} \mathfrak{Q}_\nu^\mu(z\pm hi) = e^{i\pi\mu}\left[Q_\nu^\mu(z) \mp \frac{i\pi}{2} P_\nu^\mu(z)\right]$$

und aus (3) und (5) für $-1 < z < +1$

$$(7)\qquad Q_\nu^\mu(z) = \frac{\pi}{2\sin\pi(\nu+\mu)\,\Gamma(1-\mu)}\left[\cos\pi(\nu+\mu)\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\frac{\mu}{2}} F\left(-\nu,\ \nu+1,\ 1-\mu,\ \frac{1-z}{2}\right)\right.$$
$$\left. - \left(\frac{1-z}{1+z}\right)^{\frac{\mu}{2}} F\left(-\nu,\ \nu+1,\ 1-\mu,\ \frac{1+z}{2}\right)\right],$$

also reell bei reellen Zeigern.

Ähnlich erhalten wir verschiedene Grenzwerte, wenn sich z einem Wert $z < -1$ auf der oberen bzw. unteren Halbebene unbegrenzt nähert; doch wollen wir darauf verzichten, $\mathfrak{P}_\nu^\mu(z)$ und $\mathfrak{Q}_\nu^\mu(z)$ auch für solche Werte von z zu definieren.

24. Linear unabhängige Lösungen. Wir greifen jetzt auf die Untersuchungen von Ziffer 14 zurück. Dort hatten wir für die Differentialgleichung der Kugelfunktionen

$$(1)\qquad (1-z^2)\frac{d^2w}{dz^2} - 2z\frac{dw}{dz} + \left[\nu(\nu+1) - \frac{\mu^2}{1-z^2}\right]w = 0$$

Lösungen hergeleitet, die nach Potenzen von $\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)^{-2}$ fortschreiten. Setzen wir $\zeta = z + \sqrt{z^2-1}$ mit $\sqrt{z^2-1} > 0$ für $z > 1$, so hatten sich die beiden Lösungen (14·8)

$$\begin{cases} v_1 = (z^2-1)^{\frac{\mu}{2}} \zeta^{-(\nu+\mu+1)} F\left(\mu+\frac{1}{2},\ \mu+\nu+1,\ \nu+\frac{3}{2},\ \frac{1}{\zeta^2}\right), \\ v_2 = (z^2-1)^{\frac{\mu}{2}} \zeta^{\nu-\mu} F\left(\mu+\frac{1}{2},\ \mu-\nu,\ \frac{1}{2}-\nu,\ \frac{1}{\zeta^2}\right) \end{cases}$$

ergeben. Entwickelt man v_1 und v_2 nach fallenden Potenzen von z, so erhält man für alle genügend großen $|z|$

$$(2)\qquad \begin{cases} \zeta = 2z\left[1 + \mathfrak{p}_1\left(\frac{1}{z^2}\right)\right], \\ v_1 = (z^2-1)^{\frac{\mu}{2}}(2z)^{-(\nu+\mu+1)}\left[1 + \mathfrak{p}_2\left(\frac{1}{z^2}\right)\right], \\ v_2 = (z^2-1)^{\frac{\mu}{2}}(2z)^{\nu-\mu}\left[1 + \mathfrak{p}_3\left(\frac{1}{z^2}\right)\right]. \end{cases}$$

Ferner hat man nach (19·4)

$$(3)\qquad \begin{cases} \mathfrak{Q}_\nu^\mu(z) = \frac{\sqrt{\pi}\, e^{i\pi\mu}}{2^{1+\nu}} \frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)}(z^2-1)^{\frac{\mu}{2}} z^{-(\nu+\mu+1)}\left[1 + \mathfrak{p}_4\left(\frac{1}{z^2}\right)\right], \\ \mathfrak{Q}_{-\nu-1}^\mu(z) = 2^\nu \sqrt{\pi}\, e^{i\pi\mu} \frac{\Gamma(\mu-\nu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)}(z^2-1)^{\frac{\mu}{2}} z^{\nu-\mu}\left[1 + \mathfrak{p}_5\left(\frac{1}{z^2}\right)\right]. \end{cases}$$

Aus diesen Formeln (2) und (3) können wir folgendes schließen: Wenn der Unterschied zwischen $-(\nu+\mu+1)$ und $\nu-\mu$ keine gerade Zahl, d. h. $\nu \neq k - \frac{1}{2}$ (k ganz) ist, so ist weder die Reihe für v_1 ein Teil der Reihe für v_2 noch das Umgekehrte der Fall. v_1 und v_2 sind dann linear unabhängig, $\mathfrak{Q}_\nu^\mu(z)$ ist daher proportional v_1, $\mathfrak{Q}_{-\nu-1}^\mu(z)$ proportional v_2. Denn auch $\mathfrak{Q}_{-\nu-1}^\mu(z)$ ist Lösung der Differentialgleichung (1), weil sich diese Gleichung nicht ändert, wenn man ν durch $-(\nu+1)$ ersetzt. Man erhält daher

$$(4)\qquad \begin{cases} \mathfrak{Q}_\nu^\mu(z) = 2^\mu \sqrt{\pi}\, e^{i\pi\mu} \frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)}(z^2-1)^{\frac{\mu}{2}} \zeta^{-(\nu+\mu+1)} F\left(\mu+\frac{1}{2},\, \mu+\nu+1,\, \nu+\frac{3}{2},\, \frac{1}{\zeta^2}\right), \\ \mathfrak{Q}_{-\nu-1}^\mu(z) = 2^\mu \sqrt{\pi}\, e^{i\pi\mu} \frac{\Gamma(\mu-\nu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)}(z^2-1)^{\frac{\mu}{2}} \zeta^{\nu-\mu} F\left(\mu+\frac{1}{2},\, \mu-\nu,\, \frac{1}{2}-\nu,\, \frac{1}{\zeta^2}\right). \end{cases}$$

Die Formeln (4) gelten nach den Regeln der analytischen Fortsetzung für alle Werte von μ, ν, z, für die jeweils beide Seiten analytische Funktionen von μ, ν, z sind.

Wenn μ keine ganze Zahl ist, sind $\mathfrak{P}_\nu^\mu(z)$ und $\mathfrak{P}_\nu^{-\mu}(z)$ nach Ziffer 17 linear unabhängig; es lassen sich demnach alle Lösungen der Differentialgleichung (8·1) ($\xi = z$) linear homogen durch diese Funktionen darstellen, somit auch durch $\mathfrak{P}_\nu^\mu(z)$ und $\mathfrak{Q}_\nu^\mu(z)$ gemäß (22·4), (22·2) und Ziffer 2 und 4, falls $\mu \pm \nu$ nicht ganz ist.

Es sei jetzt $\mu = m$ ganz und $m \pm \nu$ keine ganze Zahl. Da die Differentialgleichung (8·1) gegenüber einer Vorzeichenänderung von m unempfind-

lich ist, können wir uns auf nichtnegative Werte von m beschränken.

$$(z^2-1)^{-\frac{m}{2}}\,\mathfrak{P}_\nu^m(z) \quad \text{bzw.} \quad (z^2-1)^{-\frac{m}{2}}\,\mathfrak{Q}_\nu^m(z)$$

sind dann nach Ziffer 17 und 19 die m-ten Ableitungen von $\mathfrak{P}_\nu(z)$ bzw. $\mathfrak{Q}_\nu(z)$. Der Punkt 1 ist für $\mathfrak{P}_\nu(z)$ gemäß Ziffer 17 reguläre Stelle, für $\mathfrak{Q}_\nu(z)$ singulär; $\mathfrak{Q}_\nu(z)$ hat ja auf den beiden Seiten der Strecke $(-1, +1)$ nach (23·4) verschiedene Grenzwerte. $\mathfrak{P}_\nu(z)$ und $\mathfrak{Q}_\nu(z)$ sind infolgedessen linear unabhängig, somit auch ihre m-ten Ableitungen, also auch $\mathfrak{P}_\nu^m(z)$ und $\mathfrak{Q}_\nu^m(z)$.

Nun betrachten wir noch den Fall, daß $\nu = n$ und $\mu = m$ ganze Zahlen sind. Da sich die Differentialgleichung nicht ändert, wenn man n durch $-(n+1)$ oder m durch $-m$ ersetzt, können wir uns auf nichtnegative Werte beider Zahlen beschränken. Damit liefert uns aber (I·43) für $n \geqq m$ die linear unabhängigen Lösungen $\mathfrak{P}_n^m(z)$ und $\mathfrak{Q}_n^m(z)$ bzw., wenn wir noch (17·3) berücksichtigen, $\mathfrak{P}_n^{-m}(z)$ und $\mathfrak{Q}_n^m(z)$ für $n < m$, weil $\mathfrak{P}_n^{-m}(z)$ nach (17·3) im Punkt 1 keine logarithmische Singularität hat.

Wir können alles in folgender Weise zusammenfassen: Ist $\mu \pm \nu$ nicht ganz, so sind $\mathfrak{P}_\nu^\mu(z)$ und $\mathfrak{Q}_\nu^\mu(z)$ linear unabhängig; ist μ nicht ganz, so sind $\mathfrak{P}_\nu^\mu(z)$ und $\mathfrak{P}_\nu^{-\mu}(z)$ linear unabhängig. Sind $\nu = n$ und $\mu = m$ ganze Zahlen, so sind $\mathfrak{P}_n^m(z)$ und $\mathfrak{Q}_n^m(z)$ linear unabhängige Lösungen für $n \geqq m \geqq 0$, $\mathfrak{P}_n^{-m}(z)$ und $\mathfrak{Q}_n^m(z)$ für $m > n \geqq 0$.

25. Reihenentwicklungen für $\mathfrak{P}_\nu^\mu(z)$. Aus (22·2), (24·4) und (4·4) erhalten wir

$$(1) \quad \mathfrak{P}_\nu^\mu(z) = \frac{2^\mu \sin\pi(\nu+\mu)}{\sqrt{\pi}\cos\pi\nu}\,\frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)}\,(z^2-1)^{\frac{\mu}{2}}\,\zeta^{-(\nu+\mu+1)}$$
$$\times F\left(\mu+\frac{1}{2},\ \nu+\mu+1,\ \nu+\frac{3}{2},\ \frac{1}{\zeta^2}\right)$$
$$+\frac{2^\mu\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu-\mu+1)}\,(z^2-1)^{\frac{\mu}{2}}\,\zeta^{\nu-\mu}\,F\left(\mu+\frac{1}{2},\ \mu-\nu,\ \frac{1}{2}-\nu,\ \frac{1}{\zeta^2}\right).$$

Wir können $\mathfrak{P}_\nu^\mu(z)$ auch in eine nach Potenzen von $1-\frac{1}{\zeta^2}$ fortschreitende Reihe entwickeln. Wir gehen dazu von der Gleichung (12·5) aus und suchen a, b, c womöglich so zu bestimmen, daß die beiden hypergeometrischen Reihen der rechten Seite mit denen der Gleichungen (24·4) übereinstimmen, d. h. wir setzen

$$a = \mu+\frac{1}{2}, \quad b = \mu-\nu, \quad c = 2\mu+1.$$

Damit ist unsere Forderung tatsächlich erfüllt. Gleichung (12·5) lautet mit diesen Werten von a, b, c und $z = 1 - \frac{1}{\zeta^2}$:

$$(2)\quad F\left(\mu+\frac{1}{2},\ \mu-\nu,\ 2\mu+1,\ 1-\frac{1}{\zeta^2}\right)$$
$$=\frac{\Gamma(2\mu+1)\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\Gamma(\nu+\mu+1)}F\left(\mu+\frac{1}{2},\ \mu-\nu,\ \frac{1}{2}-\nu,\ \frac{1}{\zeta^2}\right)$$
$$+\frac{\Gamma(2\mu+1)\,\Gamma\left(-\nu-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\Gamma(\mu-\nu)}\zeta^{-(2\nu+1)}F\left(\mu+\frac{1}{2},\ \nu+\mu+1,\ \nu+\frac{3}{2},\ \frac{1}{\zeta^2}\right).$$

$\frac{\Gamma(2\mu+1)}{\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)}$ ersetzen wir nach (4·6) durch $\frac{2^{2\mu}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(\mu+1)$, $\frac{\Gamma\left(-\nu-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\mu-\nu)}$ nach (4·4) durch $\frac{\Gamma(\nu-\mu+1)}{\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)}\frac{\sin\pi(\nu-\mu)}{\cos\pi\nu}$; das gibt für (2)

$$(3)\quad F\left(\mu+\frac{1}{2},\ \mu-\nu,\ 2\mu+1,\ 1-\frac{1}{\zeta^2}\right)$$
$$=\frac{2^{2\mu}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(\mu+1)\left[\frac{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\nu+\mu+1)}F\left(\mu+\frac{1}{2},\ \mu-\nu,\ \frac{1}{2}-\nu,\ \frac{1}{\zeta^2}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{\Gamma(\nu-\mu+1)}{\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)}\frac{\sin\pi(\nu-\mu)}{\cos\pi\nu}\zeta^{-(2\nu+1)}F\left(\mu+\frac{1}{2},\ \nu+\mu+1,\ \nu+\frac{3}{2},\ \frac{1}{\zeta^2}\right)\right].$$

Nun drücken wir die hypergeometrischen Reihen der rechten Seite nach (24·4) durch $\mathfrak{Q}_\nu^\mu(z)$ und $\mathfrak{Q}_{-\nu-1}^\mu(z)$ aus; dadurch erhalten wir aus (3) mit Hilfe von (4·4) und (22·4)

$$(4)\quad F\left(\mu+\frac{1}{2},\ \mu-\nu,\ 2\mu+1,\ 1-\frac{1}{\zeta^2}\right)$$
$$=\frac{2^\mu e^{-i\pi\mu}}{\pi\cos\pi\nu}\Gamma(\mu+1)\frac{\Gamma(\nu-\mu+1)}{\Gamma(\nu+\mu+1)}\sin\pi(\nu-\mu)\,(z^2-1)^{-\frac{\mu}{2}}$$
$$\times\,\zeta^{\mu-\nu}\left[-\mathfrak{Q}_{-\nu-1}^\mu(z)+\mathfrak{Q}_\nu^\mu(z)\right]$$
$$=2^\mu\,\Gamma(\mu+1)\,(z^2-1)^{-\frac{\mu}{2}}\zeta^{\mu-\nu}\,\mathfrak{P}_\nu^{-\mu}(z).$$

Ersetzen wir μ durch $-\mu$, ν durch $-(\nu+1)$ und beachten (17·5), so folgt aus (4)

$$(5)\quad \mathfrak{P}_\nu^\mu(z)=\frac{2^\mu}{\Gamma(1-\mu)}(z^2-1)^{-\frac{\mu}{2}}\zeta^{\mu-\nu-1}F\left(\frac{1}{2}-\mu,\ \nu-\mu+1,\ 1-2\mu,\ 1-\frac{1}{\zeta^2}\right).$$

26. Integraldarstellung von $\mathfrak{Q}_\nu^\mu(z)$. Wir greifen jetzt auf Ziffer 10 zurück. Danach können wir Lösungen der hypergeometrischen Differentialgleichung in der Gestalt

$$\int t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}(1-zt)^{-b}\,dt$$

ansetzen. Wenden wir diesen Ansatz auf die Gleichung (14·4) mit μ und ν statt m und n an, so haben wir

$$u = \int t^{\nu+\mu}(1-t)^{-\frac{1}{2}-\mu}(1-st)^{-\frac{1}{2}-\mu}\,dt$$

und dabei den Integrationsweg so zu wählen, daß der Integrand am Anfang und am Ende des Weges denselben Wert annimmt. Aus dieser Lösung erhalten wir gemäß Ziffer 14, wenn wir $\zeta = \xi + \sqrt{\xi^2-1} = \frac{1}{\sqrt{s}}$ einführen und u mit $\zeta^{-(\mu+\nu+1)}(\xi^2-1)^{\frac{\mu}{2}}$ multiplizieren, eine Lösung der Differentialgleichung (8·1) oder der Differentialgleichung (24·1), wenn wir z statt ξ schreiben, nämlich

$$(z^2-1)^{\frac{\mu}{2}}\zeta^{-(\mu+\nu+1)}\int t^{\nu+\mu}(1-t)^{-\frac{1}{2}-\mu}\left(1-\frac{t}{\zeta^2}\right)^{-\frac{1}{2}-\mu}dt.$$

Dabei ist $\zeta = z + \sqrt{z^2-1}$ oder $z = \frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)$.

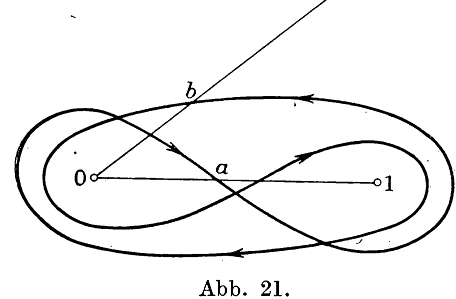


Abb. 21.

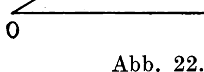


Abb. 22.

Als Integrationsweg C_4 wählen wir einen Doppelumlauf in der t-Ebene um die Punkte 0 und 1 (Abb. 21), so daß ζ^2 immer außerhalb liegt. Die Beträge der Winkel von ζ, ζ^2, $\frac{1}{\zeta}$, $z \pm 1$ sollen wie gewöhnlich π nicht übersteigen. Wegen $z = \frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)$ liegen z und ζ gleichzeitig in derselben von der imaginären Achse begrenzten Halbebene. Soll also $|\operatorname{arc}(\zeta^2)| \leqq \pi$ sein, so muß $\Re(\zeta) \geqq 0$, daher $\Re(z) \geqq 0$ sein.

Ferner sei $\operatorname{arc} t = \operatorname{arc}(1-t) = 0$ in a am Beginn des Integrationsweges und $\operatorname{arc}\left(1-\frac{t}{\zeta^2}\right) = 0$ in den Schnittpunkten b von C_4 mit der Strecke $(0, \zeta^2)$. Dann ist $\operatorname{arc}\left(1-\frac{t}{\zeta^2}\right) = \varphi$ (Abb. 22), wobei der eine

Schenkel dieses Winkels parallel zur Strecke $(0, \zeta^2)$ ist. Setzen wir noch $|\zeta| > 1$ voraus, so können wir den Doppelumlauf nach dem CAUCHYschen Satz so eng um die Strecke $(0, 1)$ zusammenziehen, ohne den Wert des Integrals zu ändern, daß auf dem ganzen Weg $\left|\frac{t}{\zeta^2}\right| < 1$ und $\left|\operatorname{arc}\left(1 - \frac{t}{\zeta^2}\right)\right| < \pi$ bleibt.

Damit wird

$$\int_{C_4} t^{\nu+\mu}(1-t)^{-\frac{1}{2}-\mu}\left(1-\frac{t}{\zeta^2}\right)^{-\frac{1}{2}-\mu} dt = \int_{C_4} t^{\nu+\mu}(1-t)^{-\frac{1}{2}-\mu} dt$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\left(\mu+\frac{3}{2}\right)\cdots\left(\mu+n-\frac{1}{2}\right)}{n!\,\zeta^{2n}} \int_{C_4} t^{\nu+\mu+n}(1-t)^{-\frac{1}{2}-\mu} dt.$$

Setzen wir noch $\Re(\nu+\mu+1) > 0$ und $\Re\left(\frac{1}{2}-\mu\right) > 0$ voraus, so liefert (16·4), wenn wir dort μ durch $-\nu-\frac{1}{2}$ und ν durch $\nu+\mu$ ersetzen, $1-t = e^{i\pi}(t-1)$ festsetzen und (4·4) benützen,

$$\int_{C_4} t^{\nu+\mu+n}(t-1)^{-\frac{1}{2}-\mu} dt$$
$$= 4\pi e^{i\pi(\nu+\mu)} \sin\pi(\nu+\mu) \frac{(\nu+\mu+1)(\nu+\mu+2)\cdots(\nu+\mu+n)\,\Gamma(\nu+\mu+1)}{\left(\frac{3}{2}+\nu\right)\left(\frac{5}{2}+\nu\right)\cdots\left(\frac{1}{2}+n+\nu\right)\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}+\nu\right)},$$

somit

$$\int_{C_4} t^{\nu+\mu+n}(1-t)^{-\frac{1}{2}-\mu} dt$$
$$= -4i\pi e^{i\pi\nu} \sin\pi(\nu+\mu) \frac{\Gamma(\nu+\mu+1)(\nu+\mu+1)(\nu+\mu+2)\cdots(\nu+\mu+n)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+\nu\right)\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}+\nu\right)\left(\frac{5}{2}+\nu\right)\cdots\left(\frac{1}{2}+n+\nu\right)}$$

und ähnlich nach (16·5)

$$\int_{C_4} t^{\nu+\mu}(1-t)^{-\frac{1}{2}-\mu} dt = -4i\pi e^{i\pi\nu} \sin\pi(\nu+\mu) \frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+\nu\right)\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)}.$$

Damit erhalten wir, wenn wir noch die Schreibweise (8·6) verwenden,

$$(1)\quad \int_{C_4} t^{\nu+\mu}(1-t)^{-\frac{1}{2}-\mu}\left(1-\frac{t}{\zeta^2}\right)^{-\frac{1}{2}-\mu} dt$$
$$= -4\pi i e^{i\pi\nu} \sin\pi(\nu+\mu) \frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)} F\left(\nu+\mu+1, \mu+\frac{1}{2}, \nu+\frac{3}{2}, \frac{1}{\zeta^2}\right).$$

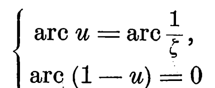
Führen wir (1) in (24·4) ein, so ergibt sich

$$(2)\qquad \mathfrak{Q}_\nu^\mu(z) = \frac{2^{\mu-2}}{\sqrt{\pi}}\, i\, e^{i\pi(\mu-\nu)} \frac{\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)}{\sin\pi(\nu+\mu)} (z^2-1)^{\frac{\mu}{2}}$$

$$\times\, \zeta^{-(\nu+\mu+1)} \int_{C_4} t^{\nu+\mu}(1-t)^{-\frac{1}{2}-\mu}\left(1-\frac{t}{\zeta^2}\right)^{-\frac{1}{2}-\mu} dt.$$

Die Gleichung gilt, solange beide Seiten analytische Funktionen von ν, μ, z sind. Wegen $|\mathrm{arc}\,(\zeta^2)| \leqq \pi$ muß $\mathfrak{R}(z) \geqq 0$ sein.

27. Umformung des Integrals. Wir wollen nun die t-Ebene durch die Gleichung $t = u\zeta$ auf die u-Ebene abbilden. Dabei geht die Kurve C_4 über in den Doppelumlauf C_4' um die Punkte $\frac{1}{\zeta}$ und 0 (Abb. 23), der Punkt a in den Punkt a' der Strecke $\left(0, \frac{1}{\zeta}\right)$, die Schnittpunkte b in die Schnittpunkte b' von C_4' mit der Strecke $(0, \zeta)$. Nach den Festsetzungen von Ziffer 26 ist



$$\begin{cases} \mathrm{arc}\, u = \mathrm{arc}\,\frac{1}{\zeta}, \\ \mathrm{arc}\,(1-u) = 0 \end{cases}$$

in a' am Beginn des Integrations-

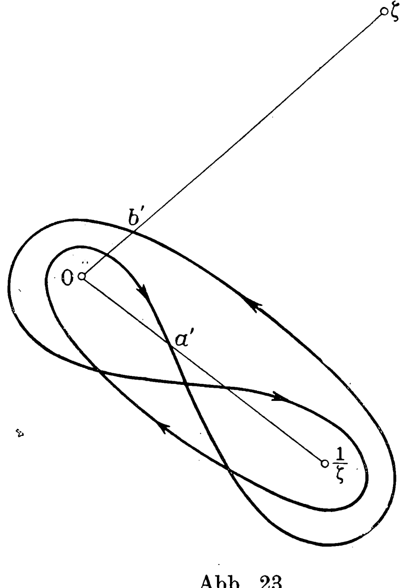


Abb. 23.

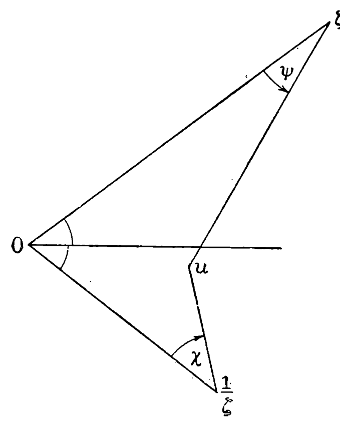


Abb. 24.

weges und

$$\mathrm{arc}\left(\frac{1}{\zeta}-\frac{u}{\zeta}\right) = 0 \quad \text{in } b'.$$

Daraus folgt (Abb. 24, die Winkel bei 0 sind einander gleich):

$$\begin{cases} \mathrm{arc}\,(1-u\zeta) = \mathrm{arc}\,\zeta + \mathrm{arc}\left(\frac{1}{\zeta}-u\right) = \chi, \\ \mathrm{arc}\left(1-\frac{u}{\zeta}\right) = \mathrm{arc}\,\frac{1}{\zeta} + \mathrm{arc}\,(\zeta-u) = \psi. \end{cases}$$

Durch die Pfeile in den Abbildungen sind die Vorzeichen der Winkel angedeutet; z. B. ist also χ negativ, weil entgegen dem positiven Drehsinn, ψ positiv. Bewegt sich u von a' aus parallel zur positiven reellen Achse ins Unendliche, so strebt $\chi + \psi$ gegen Null.

Aus (26·2) erhalten wir mit der Veränderlichen u

$$(1) \quad \mathfrak{Q}_\nu^\mu(z) = \frac{2^{\mu-2}}{\sqrt{\pi}}\, i\, e^{i\pi(\mu-\nu)} \frac{\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)}{\sin\pi(\nu+\mu)} (z^2-1)^{\frac{\mu}{2}} \int\limits_{C'} \frac{u^{\nu+\mu}\,du}{(1-2zu+u^2)^{\mu+\frac{1}{2}}}.$$

Wegen $1-2zu+u^2 = (u-\zeta)\left(u-\frac{1}{\zeta}\right)$ ist

$$\operatorname{arc}(1-2zu+u^2) = \operatorname{arc}(1-u\zeta) + \operatorname{arc}\left(1-\frac{u}{\zeta}\right) = \chi+\psi,$$

somit $=\psi$ in a' am Beginn von C_4'. Wir können auch sagen; der Winkel ist so zu wählen, daß er gegen Null strebt, wenn u von a' parallel zur positiven reellen Achse ins Unendliche rückt. Die Beschränkung $\Re(z) \geqq 0$ kann durch analytische Fortsetzung beseitigt werden.

Wenn $\Re(\nu+\mu+1) > 0$ und $\Re\left(\frac{1}{2}-\mu\right) > 0$ ist, kann man den Integrationsweg C_4' nach dem Vorbild von Ziffer 16 um die Strecke $\left(0, \frac{1}{\zeta}\right)$ zusammenziehen und erhält, wenn $\int\limits_0^{\frac{1}{\zeta}}$ das längs dieser Strecke genommene Integral bedeutet,

$$\int\limits_{C_4'} = \left[1-e^{-2i\pi\left(\mu+\frac{1}{2}\right)} + e^{-2i\pi\left(\mu+\frac{1}{2}\right)+2i\pi(\nu+\mu)} - e^{2i\pi(\nu+\mu)}\right] \int\limits_0^{\frac{1}{\zeta}}$$

$$= \left[1-e^{2i\pi(\nu+\mu)}\right]\left[1-e^{-2i\pi\left(\mu+\frac{1}{2}\right)}\right] \int\limits_0^{\frac{1}{\zeta}}$$

$$= -4ie^{i\pi\nu}\sin\pi(\nu+\mu)\sin\pi\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\int\limits_0^{\frac{1}{\zeta}},$$

daher aus (1)

$$(2) \quad \mathfrak{Q}_\nu^\mu(z) = \frac{2^\mu}{\sqrt{\pi}} e^{i\pi\mu}\cos\pi\mu\,\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)(z^2-1)^{\frac{\mu}{2}} \int\limits_0^{\frac{1}{\zeta}} \frac{u^{\nu+\mu}\,du}{(1-2zu+u^2)^{\mu+\frac{1}{2}}}$$

oder, wenn wir im Integral $\frac{1}{u}$ statt u als Veränderliche einführen und auf der von 0 nach ζ führenden Geraden von ζ ins Unendliche inte-

grieren,

$$(3)\qquad \mathfrak{Q}_\nu^\mu(z) = \frac{2^\mu}{\sqrt{\pi}} e^{i\pi\mu} \cos\pi\mu\, \Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)(z^2-1)^{\frac{\mu}{2}} \int\limits_\zeta^\infty \frac{u^{\mu-\nu-1}\,du}{(1-2zu+u^2)^{\mu+\frac{1}{2}}}.$$

28. Verallgemeinerung der Integraldarstellung von Heine. Wenn $\Re(\nu-\mu+1)>0$ und $\Re\left(\frac{1}{2}+\mu\right)>0$ ist, erhält man aus (27·3), wenn man μ durch $-\mu$ ersetzt und (4·4) verwendet,

$$(1)\qquad \mathfrak{Q}_\nu^{-\mu}(z) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^\mu} \frac{e^{-i\pi\mu}}{\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)}(z^2-1)^{-\frac{\mu}{2}} \int\limits_\zeta^\infty \frac{u^{-\mu-\nu-1}\,du}{(1-2zu+u^2)^{\frac{1}{2}-\mu}}.$$

Wir führen nun im Integral von (1) durch die Gleichung

$$u = z + \sqrt{z^2-1}\,\mathfrak{Cof}\,t$$

die Veränderliche t ein. u wandert auf der durch 0 und ζ gehenden Geraden von ζ ins Unendliche, wenn t die reelle Achse von 0 nach $+\infty$ durchläuft. Wir hatten $z=\frac{1}{2}\left(\zeta+\frac{1}{\zeta}\right)$ oder $\zeta = z+\sqrt{z^2-1}$ mit $\sqrt{z^2-1}>0$ für $z>1$ gesetzt, also ist $\frac{1}{\zeta} = z-\sqrt{z^2-1}$, daher $\sqrt{z^2-1} = \frac{1}{2}\left(\zeta-\frac{1}{\zeta}\right)$. Damit wird

$$u = \frac{1}{2}\left(\zeta+\frac{1}{\zeta}\right) + \frac{1}{2}\left(\zeta-\frac{1}{\zeta}\right)\mathfrak{Cof}\,t,$$

$$u-\zeta = \frac{1}{2}\left(\zeta-\frac{1}{\zeta}\right)(-1+\mathfrak{Cof}\,t),$$

$$u-\frac{1}{\zeta} = \frac{1}{2}\left(\zeta-\frac{1}{\zeta}\right)(1+\mathfrak{Cof}\,t),$$

$$1-2zu+u^2 = (u-\zeta)\left(u-\frac{1}{\zeta}\right) = \frac{1}{4}\left(\zeta-\frac{1}{\zeta}\right)^2 \mathfrak{Sin}^2 t = (z^2-1)\,\mathfrak{Sin}^2 t,$$

$$\frac{du}{dt} = \sqrt{z^2-1}\,\mathfrak{Sin}\,t;$$

somit ist nach (19·6) und (1) gemäß der Vorschrift über arc $(1-2zu+u^2)$

$$(2)\qquad \mathfrak{Q}_\nu^\mu(z) = \frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu-\mu+1)} e^{2i\pi\mu}\, \mathfrak{Q}_\nu^{-\mu}(z)$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2^\mu} \frac{e^{i\pi\mu}}{\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)} \frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu-\mu+1)} (z^2-1)^{\frac{\mu}{2}} \int\limits_0^\infty \frac{\mathfrak{Sin}^{2\mu} t\,dt}{(z+\sqrt{z^2-1}\,\mathfrak{Cof}\,t)^{\nu+\mu+1}}.$$

Damit ist die Integraldarstellung von Heine (I, 34·2) verallgemeinert. Man erhält sie aus (2) für $\mu=0$ und ganzes $\nu=n\geq 0$ mit Hilfe von (4·5.)

29. Integraldarstellung von $\mathfrak{P}_\nu^\mu(z)$. An Stelle von C_4 können wir auch den einfachen Umlauf C_5 um die Punkte 1 und ζ^2 (Abb. 25) wählen, beginnend und endigend im Punkte a der Strecke $1\,\zeta^2$, zuerst im positiven Sinne um 1, dann im negativen um ζ^2. Der Punkt 0 soll außerhalb bleiben. Die Beträge der Winkel von ζ, ζ^2, $\zeta^2 - 1$ sollen wieder π nicht übersteigen, ferner sei

$$\operatorname{arc} t = \operatorname{arc}(1-t) = 0 \quad \text{in } b,$$
$$\operatorname{arc}\left(1 - \frac{t}{\zeta^2}\right) = 0 \quad \text{in } c,$$
$$\operatorname{arc}(1-t) = \operatorname{arc}(\zeta^2 - 1) - \pi \quad \text{oder}$$
$$\operatorname{arc}(t-1) = \operatorname{arc}(\zeta^2 - 1) \quad \text{in } a \text{ am}$$

Beginn.

Wir bilden die t-Ebene durch die Gleichung $t = \zeta^2 - (\zeta^2 - 1)\,u$ auf die

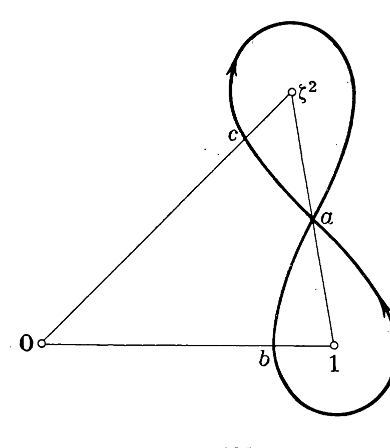


Abb. 25.

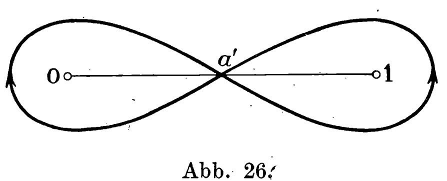


Abb. 26.

u-Ebene ab. Aus C_5 wird die Kurve C_5' (Abb. 26), der einfache Umlauf um die Punkte 1 und 0, a geht in a' über. Es ist

$$u = \frac{\zeta^2 - t}{\zeta^2 - 1}, \quad 1 - u = \frac{t-1}{\zeta^2 - 1}, \quad \frac{t}{\zeta^2} = 1 - \left(1 - \frac{1}{\zeta^2}\right)u,$$

somit $\operatorname{arc} u = \operatorname{arc}(1-u) = 0$ oder $\operatorname{arc}(u-1) = -\pi$ in a' am Beginn, wenn wir $1 - u = e^{i\pi}(u-1)$ festsetzen.

Wir denken uns den Weg C_5 so gewählt, daß er ganz in einem Kreise liegt, dessen Mittelpunkt ζ^2 ist und der durch 0 geht. Damit das möglich sei, muß $|\zeta^2 - 1| < |\zeta^2|$ oder $\mathfrak{R}(\zeta^2) > \frac{1}{2}$ sein. Es ist dann auf dem ganzen Weg $|t - \zeta^2| < |\zeta^2|$ oder $\left|1 - \frac{t}{\zeta^2}\right| < 1$, somit $|(\zeta^2 - 1)\,u| < |\zeta^2|$ oder $\left|\left(1 - \frac{1}{\zeta^2}\right)u\right| < 1$ und $\left|\operatorname{arc}\frac{t}{\zeta^2}\right| = \left|\operatorname{arc}\left[1 - \left(1 - \frac{1}{\zeta^2}\right)u\right]\right| < \pi$, weil

$$\operatorname{arc}\frac{t}{\zeta^2} = \operatorname{arc}\frac{\zeta^2 - t}{\zeta^2} = 0$$

in c ist.

Man erhält nun mit Hilfe von (4·1)

$$(1)\qquad \int_{C_5} t^{\nu+\mu}(1-t)^{-\frac{1}{2}-\mu}\left(1-\frac{t}{\zeta^2}\right)^{-\frac{1}{2}-\mu} dt$$

$$= -\zeta^{2\nu+4\mu+1}(\zeta^2-1)^{-2\mu}\int_{C_5'}\left[1-\left(1-\frac{1}{\zeta^2}\right)u\right]^{\nu+\mu}(u-1)^{-\frac{1}{2}-\mu}u^{-\frac{1}{2}-\mu}du$$

$$= -\zeta^{2\nu+4\mu+1}(\zeta^2-1)^{-2\mu}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{n!\,\Gamma(\nu+\mu-n+1)}\left(1-\frac{1}{\zeta^2}\right)^n$$

$$\times\int_{C_5'} u^{-\frac{1}{2}-\mu+n}(u-1)^{-\frac{1}{2}-\mu}du.$$

Indem wir $\Re\left(\frac{1}{2}-\mu\right)>0$ voraussetzen und das letzte Integral ähnlich wie in Ziffer 16 behandeln, ergibt sich, weil

$$\operatorname{arc}(u-1) = -\pi \text{ für } 0<u<1$$

ist,

$$\int_{C_5'} u^{-\frac{1}{2}-\mu+n}(u-1)^{-\frac{1}{2}-\mu}du$$

$$= B\left(\frac{1}{2}-\mu+n,\ \frac{1}{2}-\mu\right)\left[e^{i\pi\left(\frac{1}{2}+\mu\right)}-e^{-i\pi\left(\frac{1}{2}+\mu\right)}\right]$$

$$= 2i\cos\pi\mu\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu+n\right)}{\Gamma(1-2\mu+n)},$$

somit für (1)

$$(2)\qquad \int_{C_5} t^{\nu+\mu}(1-t)^{-\frac{1}{2}-\mu}\left(1-\frac{t}{\zeta^2}\right)^{-\frac{1}{2}-\mu} dt$$

$$= -2i\cos\pi\mu\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu\right)\Gamma(\nu+\mu+1)$$

$$\times\zeta^{2\nu+4\mu+1}(\zeta^2-1)^{-2\mu}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu+n\right)}{n!\,\Gamma(1-2\mu+n)\,\Gamma(\nu+\mu-n+1)}\left(1-\frac{1}{\zeta^2}\right)^n.$$

Nach (4·4), (4·1), (4·6) ist

$$\frac{(-1)^n \Gamma(\nu+\mu+1)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu+n\right)}{\Gamma(1-2\mu+n)\,\Gamma(\nu+\mu-n+1)}$$

$$=\frac{(-1)^n \Gamma(\nu+\mu+1)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu+n\right)\Gamma(-\nu-\mu+n)\sin\pi(n-\nu-\mu)}{\pi\,\Gamma(1-2\mu+n)}$$

$$=\frac{\sin\pi(\nu+\mu+1)\,\Gamma(\nu+\mu+1)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu+n\right)\Gamma(-\nu-\mu+n)}{\pi\,\Gamma(1-2\mu+n)}$$

$$=\frac{\Gamma(-\nu-\mu+n)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu+n\right)}{\Gamma(-\nu-\mu)\,\Gamma(1-2\mu+n)}$$

$$=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu\right)(-\nu-\mu)(-\nu-\mu+1)\cdots(-\nu-\mu+n-1)\left(\frac{1}{2}-\mu\right)\left(\frac{3}{2}-\mu\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-\mu+n-1\right)}{\Gamma(1-2\mu)(1-2\mu)(2-2\mu)\cdots(n-2\mu)}$$

$$\cos\pi\mu\frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu\right)\right]^2}{\Gamma(1-2\mu)}=\frac{2^{2\mu}\sqrt{\pi}}{\Gamma(-\mu)}\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu\right)\sin\pi\left(\frac{1}{2}-\mu\right)$$
$$=2^{2\mu}\sqrt{\pi}\sin\pi\mu\frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)};$$

daher mit (8·6)

$$(3)\qquad \int_{C_5} t^{\nu+\mu}(1-t)^{-\frac{1}{2}-\mu}\left(1-\frac{t}{\zeta^2}\right)^{-\frac{1}{2}-\mu}dt$$
$$=-\,2^{2\mu+1}\,i\sqrt{\pi}\sin\pi\mu\frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)}$$
$$\times\,\zeta^{2\nu+4\mu+1}(\zeta^2-1)^{-2\mu}F\left(-\nu-\mu,\ \frac{1}{2}-\mu,\ 1-2\mu,\ 1-\frac{1}{\zeta^2}\right).$$

Wegen $z=\frac{1}{2}\left(\zeta+\frac{1}{\zeta}\right)$ ist $z^2-1=\left(\frac{\zeta^2-1}{2\zeta}\right)^2$, daher

$$(4)\qquad (2\zeta)^{2\mu}(\zeta^2-1)^{-2\mu}=(z^2-1)^{-\mu}.$$

Ferner ist nach (17·5), (25·5), (3), (4)

$$\mathfrak{P}_\nu^\mu(z)=\mathfrak{P}_{-\nu-1}^\mu(z)=\frac{2^\mu}{\Gamma(1-\mu)}(z^2-1)^{-\frac{\mu}{2}}$$
$$\times\,\zeta^{\mu+\nu}F\left(\frac{1}{2}-\mu,\ -\nu-\mu,\ 1-2\mu,\ 1-\frac{1}{\zeta^2}\right)$$
$$=\frac{2^\mu}{\Gamma(1-\mu)}(z^2-1)^{-\frac{\mu}{2}}\zeta^{\mu+\nu}\frac{i\,\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)}{2\sqrt{\pi}\sin\pi\mu\,\Gamma(\mu)}(z^2-1)^\mu\zeta^{-2\nu-2\mu-1}$$
$$\times\int_{C_5} t^{\nu+\mu}(1-t)^{-\frac{1}{2}-\mu}\left(1-\frac{t}{\zeta^2}\right)^{-\frac{1}{2}-\mu}dt$$

oder mit (4·4)

$$(5)\qquad \mathfrak{P}_\nu^\mu(z) = 2^{\mu-1}\, i\pi^{-\frac{3}{2}}\, \Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)(z^2-1)^{\frac{\mu}{2}}\zeta^{-\mu-\nu-1} \times \int_{C_5} t^{\nu+\mu}(1-t)^{-\frac{1}{2}-\mu}\left(1-\frac{t}{\zeta^2}\right)^{-\frac{1}{2}-\mu} dt.$$

Die Gleichung gilt, solange beide Seiten analytische Funktionen von ν, μ, z sind, nur muß $\Re(z) \geqq 0$ sein, damit nämlich $|\operatorname{arc}(\zeta^2)| \leqq \pi$ bleibe (vgl. Ziffer 26).

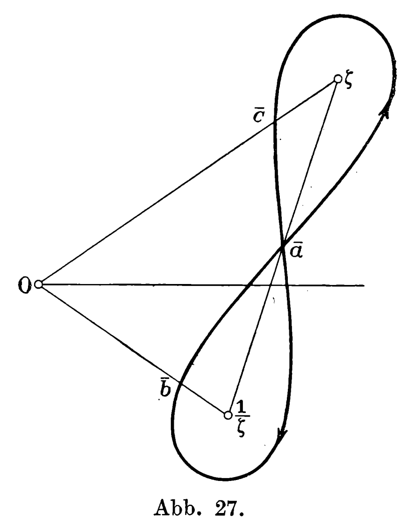


Abb. 27.

30. Umformung des Integrals. Wie in Ziffer 27, bilden wir jetzt die t-Ebene durch die Gleichung $t = u\zeta$ auf die u-Ebene ab. Der Weg C_5 geht dabei in die Kurve um die Punkte $\frac{1}{\zeta}$ und ζ über (Abb. 27). Wir wollen den Umlaufssinn umkehren und sie dann mit $\bar{C}_5$ bezeichnen. In Abb. 27 bedeutet der Pfeil bereits den umgekehrten Umlaufssinn. Der Punkt a geht in den Punkt $\bar{a}$ auf der Strecke $\left(\zeta, \frac{1}{\zeta}\right)$ über, der Punkt b in den Punkt $\bar{b}$ der Strecke $\left(0, \frac{1}{\zeta}\right)$, der Punkt c in den Punkt $\bar{c}$ der Strecke $(0, \zeta)$.

Nach den Festsetzungen von Ziffer 29 ist $\operatorname{arc}(1-u\zeta) = \operatorname{arc}(1-t) = 0$ in $\bar{b}$, $\operatorname{arc}\left(1-\frac{u}{\zeta}\right) = \operatorname{arc}\left(1-\frac{t}{\zeta^2}\right) = 0$ in $\bar{c}$. Damit liegen die Verhältnisse von Ziffer 27 (Abb. 24) vor. Der Winkel von $1-2zu+u^2$ ist also wieder so bestimmt, daß er gegen Null strebt, wenn u von $\bar{a}$ am Beginn des Integrationsweges parallel zur positiven reellen Achse ins Unendliche rückt. Wegen der Umkehrung der Integrationsrichtung folgt aus (29·5)

$$(1)\qquad \mathfrak{P}_\nu^\mu(z) = \frac{2^\mu}{2\pi i}\,\frac{\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}\,(z^2-1)^{\frac{\mu}{2}}\int_{\bar{C}_5}\frac{u^{\nu+\mu}\,du}{(1-2zu+u^2)^{\frac{1}{2}+\mu}}.$$

Die Beschränkung $\Re(z) \geqq 0$ läßt sich durch analytische Fortsetzung beseitigen.

Ist $\mu = m$ eine ganze Zahl, so können wir bei der Umlaufung von $\frac{1}{\zeta}$ den Sinn umkehren. Denn ζ und $\frac{1}{\zeta}$ sind in diesem Falle Verzweigungs-

punkte erster Ordnung. Die RIEMANNsche Fläche von $(1 - 2zu + u^2)^{-\frac{1}{2}-m}$ besteht also in diesem Fall aus zwei Blättern, die z. B. längs der Strecke $\left(\zeta, \frac{1}{\zeta}\right)$ zusammenhängen. Wenn wir daher nach der Umkreisung von ζ über $\bar{a}$ hinaus weitergehen, kommen wir in das zweite Blatt, umlaufen in diesem den Punkt $\frac{1}{\zeta}$ und gelangen nachher bei $\bar{a}$ wieder ins erste zurück. Durchlaufen wir dagegen die Schlinge um $\frac{1}{\zeta}$ in entgegengesetztem Sinn, so bleiben wir im ersten Blatt. Nun unterscheiden sich die Werte des Integranden in entsprechenden Punkten beider Blätter nur durch das Vorzeichen. Die Umkehrung des Durchlaufungssinnes bewirkt nochmalige Vorzeichenänderung, somit bleibt das Integral bei entgegengesetzter Umlaufung von $\frac{1}{\zeta}$ ungeändert. Wir können somit in diesem Fall die beiden Punkte ζ und $\frac{1}{\zeta}$ nach dem CAUCHYschen Integralsatz in einem geschlossenen Zug im positiven Sinn umlaufen (Abb. 28), wobei der Punkt 0 außerhalb liegt.

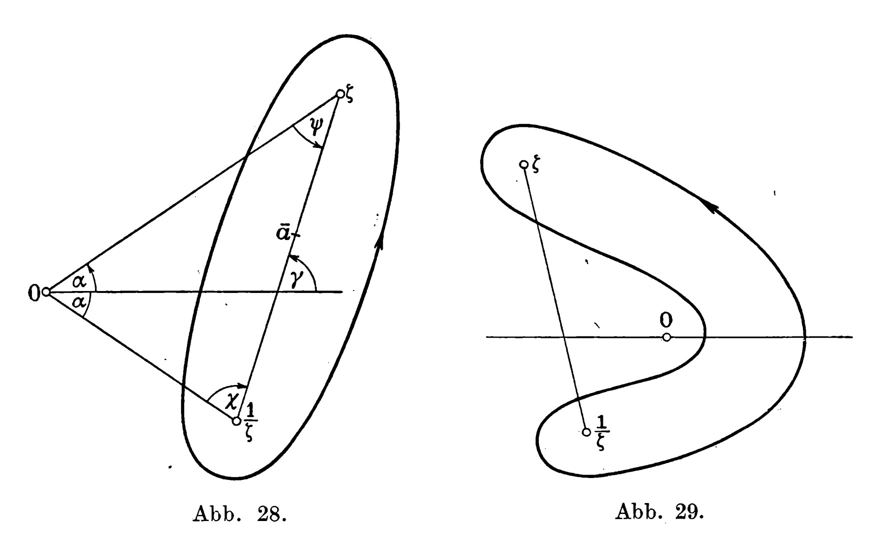


Abb. 28. Abb. 29.

Gemäß seiner Entstehung aus C_5 trifft der neue Integrationsweg die reelle Achse rechts vom Nullpunkt. Erweitert man nun den Gültigkeitsbereich der Formeln durch analytische Fortsetzung in der Weise, daß ζ und $\frac{1}{\zeta}$ auf die linke Halbebene wandern, so darf man daher den Integrationsweg nicht über den Nullpunkt hinwegziehen, weil dieser Punkt singuläre Stelle des Integranden ist. Der Weg wird also in diesem Fall z. B. die Gestalt von Abb. 29 haben.

Ist $m = 0$ und n positiv ganz, $z = \cos\vartheta$ mit $0 < \vartheta < \pi$, so ergibt sich mit (4·5) Formel (I, 16·1), wenn wir den Weg auf die Strecke $\left(\frac{1}{\zeta}, \zeta\right)$ zusammenziehen.

31. Verallgemeinerung der Integraldarstellungen von Laplace und Jacobi. Wenn wir μ in Formel (30·1) durch $-\mu$ ersetzen und (4·4) verwenden, erhalten wir

$$(1)\quad \mathfrak{P}_\nu^{-\mu}(z) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu\right)}{2^{1+\mu} i \pi^{\frac{3}{2}}} (z^2-1)^{-\frac{\mu}{2}} \int\limits_{\bar{C}_5} u^{\nu-\mu}(1-2zu+u^2)^{\mu-\frac{1}{2}}\, du$$

$$= \frac{(z^2-1)^{-\frac{\mu}{2}}}{2^{1+\mu} i \sqrt{\pi} \cos\pi\mu\, \Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)} \int\limits_{\bar{C}_5} u^{\nu-\mu}(1-2zu+u^2)^{\mu-\frac{1}{2}}\, du.$$

Setzt man noch $\Re\left(\mu+\frac{1}{2}\right) > 0$ voraus, so kann man den Integrationsweg auf die Strecke $\left(\frac{1}{\zeta}, \zeta\right)$ zusammenziehen, wozu natürlich jetzt nach der obigen Bemerkung über den Integrationsweg $\Re(\zeta) > 0$ und daher auch $\Re(z) > 0$ sein muß.

Man erhält nach dem Vorbild von Ziffer 27

$$\int\limits_{\bar{C}_5} = \left[1 - e^{2i\pi\left(\mu-\frac{1}{2}\right)}\right] \int\limits_{\frac{1}{\zeta}}^{\zeta},$$

daher gemäß (1)

$$(2)\quad \mathfrak{P}_\nu^{-\mu}(z) = \frac{e^{i\pi\left(\mu-\frac{1}{2}\right)}}{2^{\mu}\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)} (z^2-1)^{-\frac{\mu}{2}} \int\limits_{\frac{1}{\zeta}}^{\zeta} u^{\nu-\mu}(1-2zu+u^2)^{\mu-\frac{1}{2}}\, du.$$

Der Winkel von $1-2zu+u^2$ ist nach Ziffer 27, wie schon erwähnt, in $\bar{a}$ am Beginn durch $\chi+\psi$ gegeben. Nun ist (Abb. 28) $\operatorname{arc}\left(\zeta-\frac{1}{\zeta}\right) = \gamma$, $\psi = \gamma - \alpha$, $\chi = \alpha + \gamma - \pi$ (man beachte, daß z. B. χ in der Abbildung negativ ist), also $\operatorname{arc}(1-2zu+u^2) = 2\gamma - \pi$ in $\bar{a}$.

Der Integration längs der Strecke $\left(\frac{1}{\zeta}, \zeta\right)$ entsprechend, führen wir die Veränderliche φ durch die Gleichung $u = z + \sqrt{z^2-1}\cos\varphi$ ein. Gemäß Ziffer 28 hat man

$$z = \frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right),$$

$$\sqrt{z^2-1} = \frac{1}{2}\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right),$$

daher

$$u = \frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right) + \frac{1}{2}\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right)\cos\varphi,$$

u wandert also auf der Strecke von ζ nach $\frac{1}{\zeta}$, wenn φ das Intervall $0 \leqq \varphi \leqq \pi$ durchläuft. Ferner ist

$$u - \zeta = \frac{1}{2}\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right)(-1 + \cos\varphi),$$

$$u - \frac{1}{\zeta} = \frac{1}{2}\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right)(1 + \cos\varphi),$$

$$1 - 2zu + u^2 = (u - \zeta)\left(u - \frac{1}{\zeta}\right) = -\frac{1}{4}\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right)^2 \sin^2\varphi = -(z^2 - 1)\sin^2\varphi$$
$$= e^{-i\pi}(z^2 - 1)\sin^2\varphi,$$

denn

$$\operatorname{arc}(1 - 2zu + u^2) = 2\gamma - \pi = \operatorname{arc}\left[\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right)^2\right] - \pi,$$

schließlich

$$\frac{du}{d\varphi} = -\sqrt{z^2 - 1}\sin\varphi.$$

Aus (2) folgt danach

$$(3) \qquad \mathfrak{P}_\nu^{-\mu}(z) = \frac{(z^2 - 1)^{\frac{\mu}{2}}}{2^\mu \sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\mu + \frac{1}{2}\right)} \int_0^\pi (z + \sqrt{z^2 - 1}\cos\varphi)^{\nu - \mu} \sin^{2\mu}\varphi \, d\varphi.$$

(22·4) liefert somit

$$(4) \qquad \mathfrak{P}_\nu^\mu(z) - \frac{2}{\pi} e^{-i\pi\mu} \sin\pi\mu\, \mathfrak{Q}_\nu^\mu(z)$$
$$= \frac{\Gamma(\nu + \mu + 1)}{\Gamma(\nu - \mu + 1)} \frac{(z^2 - 1)^{\frac{\mu}{2}}}{2^\mu \sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\mu + \frac{1}{2}\right)} \int_0^\pi (z + \sqrt{z^2 - 1}\cos\varphi)^{\nu - \mu} \sin^{2\mu}\varphi\, d\varphi.$$

Wir ersetzen ν durch $-(\nu + 1)$ und erhalten wegen (17·5)

$$(5) \qquad \mathfrak{P}_\nu^\mu(z) - \frac{2}{\pi} e^{-i\pi\mu} \sin\pi\mu\, \mathfrak{Q}_{-\nu-1}^\mu(z)$$
$$= \frac{\Gamma(\mu - \nu)}{\Gamma(-\mu - \nu)} \frac{(z^2 - 1)^{\frac{\mu}{2}}}{2^\mu \sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\mu + \frac{1}{2}\right)} \int_0^\pi \frac{\sin^{2\mu}\varphi\, d\varphi}{(z + \sqrt{z^2 - 1}\cos\varphi)^{\nu + \mu + 1}}.$$

Wir nehmen dazu Gleichung (22·2):

$$(6) \qquad \mathfrak{P}_\nu^\mu(z) - \frac{e^{-i\pi\mu}}{\pi\cos\pi\nu} \sin\pi(\nu + \mu)\, \mathfrak{Q}_\nu^\mu(z)$$
$$+ \frac{e^{-i\pi\mu}}{\pi\cos\pi\nu} \sin\pi(\nu - \mu)\, \mathfrak{Q}_{-\nu-1}^\mu(z) = 0.$$

Nun multiplizieren wir Gleichung (5) mit $\frac{\sin\pi(\nu-\mu)}{\cos\pi\nu}$, Gleichung (6) mit $2\sin\pi\mu$ und addieren; dabei fällt das Glied mit $\mathfrak{Q}^\mu_{-\nu-1}(z)$ heraus, und es bleibt, wenn wir noch beachten, daß

$$\frac{\Gamma(\mu-\nu)}{\Gamma(-\mu-\nu)}\,\frac{\sin\pi(\nu-\mu)}{\cos\pi\nu}=\frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu-\mu+1)}\,\frac{\sin\pi(\nu+\mu)}{\cos\pi\nu}$$

wegen (4·4) ist,

$$(7)\qquad \mathfrak{P}_\nu^\mu(z)-\frac{2}{\pi}e^{-i\pi\mu}\sin\pi\mu\,\mathfrak{Q}_\nu^\mu(z)$$

$$=\frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu-\mu+1)}\,\frac{(z^2-1)^{\frac{\mu}{2}}}{2^\mu\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)}\int_0^\pi\frac{\sin^{2\mu}\varphi\,d\varphi}{(z+\sqrt{z^2-1}\cos\varphi)^{\nu+\mu+1}}.$$

Diese Formeln (4) und (7) gelten für $\Re(z)>0$. Durch sie sind die Integraldarstellungen von LAPLACE (I, 15·1) und JACOBI (I, 15·6) verallgemeinert, die sich aus ihnen für $\mu=0$ und ganzes $\nu=n\geqq 0$ mit Hilfe von (4·5) ergeben. Mit Hilfe von Ziffer 22 und 23 kann man aus den Formeln (4) und (7) solche für $\Re(z)<0$ und $-1<z<+1$ herleiten.

Abb. 30.

32. Integraldarstellungen von $\mathfrak{P}_\nu^m(z)$ bei ganzzahligem m. Wir gehen von der Formel (17·4) aus, in der m eine ganze Zahl bedeutet, und setzen außerdem $\Re(z)>0$ voraus. Als Integrationsweg $\bar{C}_1$ wählen wir einen Kreis K (Abb. 30), dessen Mittelpunkt z ist und dessen Halbmesser zwischen $|z-1|$ und $|z+1|$ liegt. Die Integration möge im Punkte a beginnen.

Wir führen die neue Veränderliche φ durch die Gleichung

$$t=z+\sqrt{z^2-1}\,e^{i(\varphi-\psi)\mp u}$$

ein. Dabei sei u reell so gewählt, daß $\left|\sqrt{z^2-1}\right|e^{\mp u}$ dem Halbmesser des Kreises gleich wird. Es muß demnach

$$|z-1|<\left|\sqrt{z^2-1}\right|e^{\mp u}<|z+1|,$$

$$\left|\frac{z-1}{z+1}\right|<e^{\mp 2u}<\left|\frac{z+1}{z-1}\right|,$$

also z. B. $0\leqq u<\frac{1}{2}\ln\left|\frac{z+1}{z-1}\right|$ sein. Durchläuft φ das Intervall $0\leqq\varphi\leqq 2\pi$, so beschreibt t von a aus den ganzen Kreis im positiven Sinn.

Man hat

$$t^2 - 1 = 2\sqrt{z^2-1}\, e^{i(\varphi-\psi)\mp u}\left[z + \sqrt{z^2-1}\cos(\varphi-\psi\pm iu)\right],$$

daher mit (17·4)

$$\text{(1)}\qquad \mathfrak{P}_\nu^m(z) = \frac{1}{2\pi}\frac{\Gamma(\nu+m+1)}{\Gamma(\nu+1)}\int_0^{2\pi}\left[z+\sqrt{z^2-1}\cos(\varphi-\psi\pm iu)\right]^\nu e^{-im(\varphi-\psi)\pm mu}\,d\varphi.$$

Es ist infolgedessen

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[z+\sqrt{z^2-1}\cos(\varphi-\psi\pm iu)\right]^\nu(\cos m\varphi - i\sin m\varphi)\,d\varphi$$
$$= \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+m+1)}e^{-im(\psi\mp iu)}\,\mathfrak{P}_\nu^m(z)$$

oder, wenn wir m durch $-m$ ersetzen und (22·5) verwenden,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[z+\sqrt{z^2-1}\cos(\varphi-\psi\pm iu)\right]^\nu(\cos m\varphi + i\sin m\varphi)\,d\varphi$$
$$= \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+m+1)}e^{im(\psi\mp iu)}\,\mathfrak{P}_\nu^m(z).$$

Addition und Subtraktion dieser beiden Gleichungen liefert

$$\text{(2)}\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\left[z+\sqrt{z^2-1}\cos(\varphi-\psi\pm iu)\right]^\nu\cos m\varphi\,d\varphi \\ \qquad = \dfrac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+m+1)}\cos m(\psi\mp iu)\,\mathfrak{P}_\nu^m(z), \\ \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\left[z+\sqrt{z^2-1}\cos(\varphi-\psi\pm iu)\right]^\nu\sin m\varphi\,d\varphi \\ \qquad = \dfrac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+m+1)}\sin m(\psi\mp iu)\,\mathfrak{P}_\nu^m(z). \end{cases}$$

Wenn wir ν durch $-(\nu+1)$ ersetzen, folgt daraus mit Rücksicht auf (17·5) und (4·4)

$$\text{(3)}\qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos m\varphi\,d\varphi}{\left[z+\sqrt{z^2-1}\cos(\varphi-\psi\pm iu)\right]^{\nu+1}} = \frac{\Gamma(-\nu)}{\Gamma(m-\nu)}\cos m(\psi\mp iu)\,\mathfrak{P}_\nu^m(z)$$
$$= (-1)^m\frac{\Gamma(\nu-m+1)}{\Gamma(\nu+1)}\cos m(\psi\mp iu)\,\mathfrak{P}_\nu^m(z)$$

und

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sin m\varphi\,d\varphi}{\left[z+\sqrt{z^2-1}\cos(\varphi-\psi\pm iu)\right]^{\nu+1}}$$
$$= (-1)^m\frac{\Gamma(\nu-m+1)}{\Gamma(\nu+1)}\sin m(\psi\mp iu)\,\mathfrak{P}_\nu^m(z).$$

Die Formeln (2) und (3) kommen für positive ganzzahlige n schon bei HEINE[1]) vor.

Wir wählen jetzt a so, daß $\psi = 0$ wird, und außerdem $u = 0$. Dann folgt aus (2) und (3)

$$(4)\qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (z+\sqrt{z^2-1}\cos\varphi)^\nu \cos m\varphi\, d\varphi = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+m+1)}\mathfrak{P}_\nu^m(z)$$

und

$$(5)\qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\cos m\varphi\, d\varphi}{(z+\sqrt{z^2-1}\cos\varphi)^{\nu+1}} = (-1)^m \frac{\Gamma(\nu-m+1)}{\Gamma(\nu+1)}\mathfrak{P}_\nu^m(z).$$

Nun ist

$$\int_0^{2\pi} (z+\sqrt{z^2-1}\cos\varphi)^\nu \cos m\varphi\, d\varphi = 2\int_0^{\pi} (z+\sqrt{z^2-1}\cos\varphi)^\nu \cos m\varphi\, d\varphi,$$

da der Integrand für $\varphi = \pi + \gamma$ und $\varphi = \pi - \gamma$ bei beliebigem γ wegen der Ganzzahligkeit von m jeweils denselben Wert hat. Damit erhält man aus (4) für positive ganzzahlige m und n nach (4·3)

$$(6)\qquad \mathfrak{P}_n^m(z) = \frac{(n+m)!}{n!\,\pi}\int_0^{\pi} (z+\sqrt{z^2-1}\cos\varphi)^n \cos m\varphi\, d\varphi.$$

Nach den Grundsätzen der analytischen Fortsetzung gilt diese Beziehung in der ganzen, von -1 bis $+1$ aufgeschnittenen z-Ebene. Ist $-1 < z < +1$, so haben wir nach Ziffer 23 den Faktor i^m hinzuzufügen, wenn der Grenzübergang zu dem betreffenden Punkte auf der oberen Halbebene vollzogen wird. Damit stimmt dann Formel (6) genau mit (I, 19·4) überein.

33. Verallgemeinerung der Integraldarstellungen von Mehler. Wir greifen auf Formel (30·1) zurück. Wenn $z = \cos\vartheta$ $(0 < \vartheta < \pi)$ ist, wird $\zeta = e^{i\vartheta}$ und $\frac{1}{\zeta} = e^{-i\vartheta}$; die Verbindungsstrecke der beiden Punkte steht also senkrecht auf der reellen Achse. Als Weg $\bar{C}_5$ können wir den durch diese Punkte gehenden Bogen L des Einheitskreises samt den zwei kleinen Kreisen um die beiden Punkte wählen (Abb. 31). Da $\bar{C}_5$ die reelle Achse rechts vom Nullpunkt treffen muß, hat man immer jenen Bogen des Einheitskreises zu nehmen, der die positive reelle Achse trifft. Wir setzen $\Re\left(\frac{1}{2}-\mu\right) > 0$ voraus. Damit verschwinden die von den beiden kleinen Kreisen herrührenden Bestandteile des Integrals, wenn die Halbmesser

---

[1]) E. HEINE, Handbuch der Kugelfunktionen, 2. Aufl., Berlin 1878 und 1881, G. Reimer, Bd. 1, S. 211.

gegen Null streben. Der übrigbleibende Teil des Weges liefert nach (30·1) und dem Verfahren von Ziffer 18 mit $h > 0$

(1) $$\lim_{h\to 0} \mathfrak{P}_\nu^\mu(\cos\vartheta + hi)$$

$$= 2^{\mu-1}\pi^{-\frac{3}{2}} e^{\frac{1}{2}i\pi\mu}\,\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\sin^\mu\vartheta\,[1 - e^{-i\pi(2\mu+1)}]\,\frac{1}{i}\int_L \frac{u^{\nu-\frac{1}{2}}\,du}{(u+u^{-1}-2\cos\vartheta)^{\mu+\frac{1}{2}}}.$$

Dabei gilt nach den Festsetzungen von Ziffer 27 und 29 über die Winkel folgendes (Abb. 31):

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{arc}(u-\zeta) = -\alpha\\ &\operatorname{arc}\left(u-\frac{1}{\zeta}\right) = \beta\\ &\operatorname{arc} u = -\gamma\\ &\operatorname{arc}(u+u^{-1}-2\cos\vartheta)\\ &\qquad = \beta+\gamma-\alpha \end{aligned}\right\}\text{in } \bar{a},$$

somit $\operatorname{arc}(u+u^{-1}-2\cos\vartheta)\to 0$ für $\bar{a}\to\frac{1}{\zeta}$, weil dann $\alpha\to\frac{\pi}{2}$, $\beta\to\frac{\pi}{2}-\vartheta$, $\gamma\to\vartheta$.

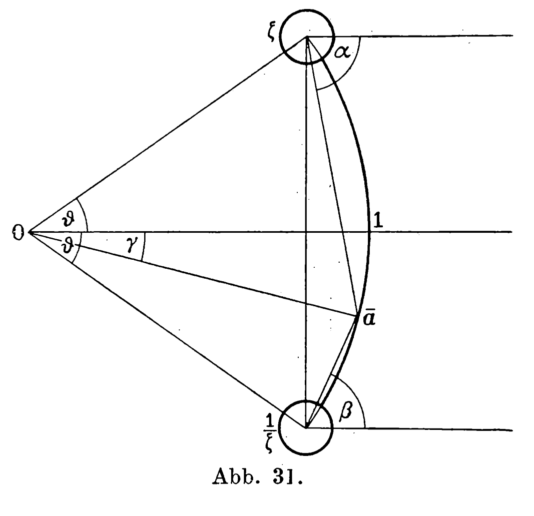


Abb. 31.

Wir führen nun $u = e^{i\varphi}$ ein. Es wird

(2) $$1 - e^{-i\pi(2\mu+1)} = 2\,e^{-i\pi\mu}\cos\pi\mu$$

$$\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu\right)\cos\pi\mu} \quad \text{nach (4·4)},$$

$$\frac{1}{i}\int_L \frac{u^{\nu-\frac{1}{2}}\,du}{(u+u^{-1}-2\cos\vartheta)^{\mu+\frac{1}{2}}} = \int_{-\vartheta}^{+\vartheta} \frac{e^{i\varphi\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\,d\varphi}{(2\cos\varphi-2\cos\vartheta)^{\mu+\frac{1}{2}}}$$

$$= \int_{-\vartheta}^{+\vartheta} \frac{\cos\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\varphi\,d\varphi}{(2\cos\varphi-2\cos\vartheta)^{\mu+\frac{1}{2}}} + i\int_{-\vartheta}^{+\vartheta} \frac{\sin\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\varphi\,d\varphi}{(2\cos\varphi-2\cos\vartheta)^{\mu+\frac{1}{2}}}$$

$$= 2\int_0^\vartheta \frac{\cos\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\varphi\,d\varphi}{(2\cos\varphi-2\cos\vartheta)^{\mu+\frac{1}{2}}},$$

somit nach (23·2) und (1)

$$(3)\qquad P_\nu^\mu(\cos\vartheta) = e^{\frac{i\pi\mu}{2}} \lim_{h\to 0} \mathfrak{P}_\nu^\mu(\cos\vartheta + hi)$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin^\mu\vartheta}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu\right)} \int_0^\vartheta \frac{\cos\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\varphi\, d\varphi}{(\cos\varphi - \cos\vartheta)^{\mu+\frac{1}{2}}}.$$

Damit ist die Integraldarstellung von MEHLER (I, 16·2) verallgemeinert, die sich für $\mu = 0$ und positive ganzzahlige $\nu = n$ ergibt.

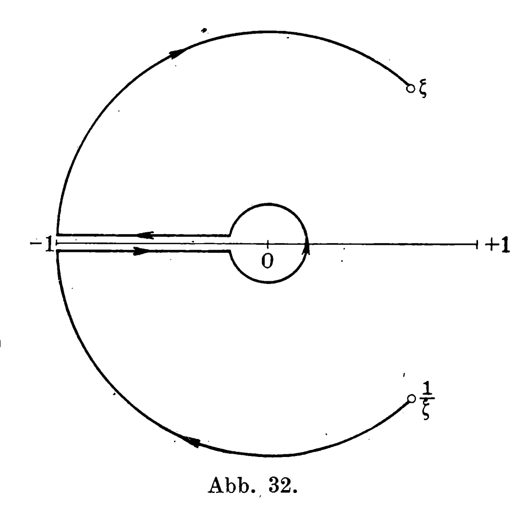


Abb. 32.

Nach dem CAUCHYschen Satz können wir statt des Weges von Abb. 31 auch den in Abb. 32 gezeichneten wählen. Die geradlinigen Bestandteile sollen mit der reellen Achse zusammenfallen. Ferner sei außer $\Re\left(\frac{1}{2}-\mu\right) > 0$ auch $\Re(\nu+\mu+1) > 0$. Dann verschwindet der von dem kleinen Kreis um den Nullpunkt stammende Bestandteil des Integrals, wenn der Halbmesser gegen Null strebt. Den übrigbleibenden Teil des neuen Weges nennen wir wieder kurz L. Es ist aber nach (1), (2) und (3)

$$(4)\qquad P_\nu^\mu(\cos\vartheta) = \frac{2^\mu \sin^\mu\vartheta}{\sqrt{\pi}\, i\, \Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu\right)} \int_L \frac{u^{\nu+\mu}\, du}{(1-2zu+u^2)^{\mu+\frac{1}{2}}}.$$

Gemäß den Festsetzungen über die Winkel gilt folgendes (Abb. 33):

$$\begin{cases} \operatorname{arc}(u-\zeta) = -\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right), \\ \operatorname{arc}\left(u-\frac{1}{\zeta}\right) = \frac{3\pi}{2} - (\alpha+\vartheta), \\ \operatorname{arc}(1-2zu+u^2) = \pi - (2\alpha+\vartheta) = \pi - \varphi. \end{cases}$$

Daß die in Abb. 33 ersichtlich gemachten Winkelbeziehungen richtig sind, erkennt man leicht aus dem Satz über Peripherie- und Zentriwinkel eines Kreises. $\operatorname{arc}(1-2zu+u^2)$ wird also auf der reellen Achse Null, wie es nach den Festsetzungen sein soll. Spiegeln wir die Abbildung an der reellen Achse, so erhalten wir für den in der oberen Halbebene gelegenen Teil des Integrationsweges

$$\left\{\begin{aligned} &\operatorname{arc}(u-\zeta) = -\left[\frac{3\pi}{2}-(\alpha+\vartheta)\right],\\ &\operatorname{arc}\left(u-\frac{1}{\zeta}\right) = \frac{\pi}{2}+\alpha,\\ &\operatorname{arc}(1-2zu+u^2) = 2\alpha+\vartheta-\pi = -(\pi-\varphi).\end{aligned}\right.$$

Das Integral zerfällt in vier Teile:

Auf dem Kreisbogen von $\frac{1}{\zeta}$ bis -1 ist $u=e^{-i\varphi}$ mit $\vartheta \leqq \varphi \leqq \pi$, auf der Strecke von -1 bis 0 ist $u=e^{-i\pi}e^{-t}$ mit $0 \leqq t \leqq +\infty$, auf der Strecke von 0 bis -1 ist $u=e^{i\pi}e^{-t}$ mit $+\infty \geqq t \geqq 0$, auf dem Kreisbogen von -1 bis ζ ist $u=e^{i\varphi}$ mit $\pi \geqq \varphi \geqq \vartheta$. Es wird somit

$$\int_L \frac{u^{\nu+\mu}\,du}{(1-2zu+u^2)^{\mu+\frac{1}{2}}} = \int_\vartheta^\pi \frac{(-i)\,e^{-i(\nu+\mu+1)\varphi}\,d\varphi}{e^{i\left(\mu+\frac{1}{2}\right)(\pi-\varphi)}(2\cos\vartheta-2\cos\varphi)^{\mu+\frac{1}{2}}}$$

$$+\int_0^\infty \frac{e^{-i\pi(\nu+\mu)}\,e^{-(\nu+u+1)t}\,dt}{e^{-\left(\mu+\frac{1}{2}\right)t}(2\cos\vartheta+2\,\mathfrak{Cof}\,t)^{\mu+\frac{1}{2}}}$$

$$+\int_\infty^0 \frac{e^{i\pi(\nu+\mu)}\,e^{-(\nu+u+1)t}\,dt}{e^{-\left(\mu+\frac{1}{2}\right)t}(2\cos\vartheta+2\,\mathfrak{Cof}\,t)^{\mu+\frac{1}{2}}}$$

$$+\int_\pi^\vartheta \frac{i\,e^{i(\nu+\mu+1)\varphi}\,d\varphi}{e^{-i\left(\mu+\frac{1}{2}\right)(\pi-\varphi)}(2\cos\vartheta-2\cos\varphi)^{\mu+\frac{1}{2}}}$$

$$=-2i\int_\vartheta^\pi \frac{\cos\left[\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\varphi+\pi\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\right]}{(2\cos\vartheta-2\cos\varphi)^{\mu+\frac{1}{2}}}\,d\varphi$$

$$-2i\sin\pi(\nu+\mu)\int_0^\infty \frac{e^{-\left(\nu+\frac{1}{2}\right)t}\,dt}{(2\cos\vartheta+2\,\mathfrak{Cof}\,t)^{\mu+\frac{1}{2}}},$$

infolgedessen nach (4)

$$(5)\quad P_\nu^\mu(\cos\vartheta) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin^\mu\vartheta}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu\right)}\left\{\int\limits_\vartheta^\pi \frac{\cos\left[\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\varphi+\pi\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\right]}{(\cos\vartheta-\cos\varphi)^{\mu+\frac{1}{2}}}\,d\varphi\right.$$

$$\left.+\sin\pi(\nu+\mu)\int\limits_0^\infty \frac{e^{-\left(\nu+\frac{1}{2}\right)t}\,dt}{(\cos\vartheta+\mathfrak{Cof}\,t)^{\mu+\frac{1}{2}}}\right\}.$$

Das ist die Verallgemeinerung der Integraldarstellung von MEHLER (I, 16·3), die man für $\mu = 0$ und positives ganzzahliges $\nu = n$ mit Hilfe von (4·5) erhält.

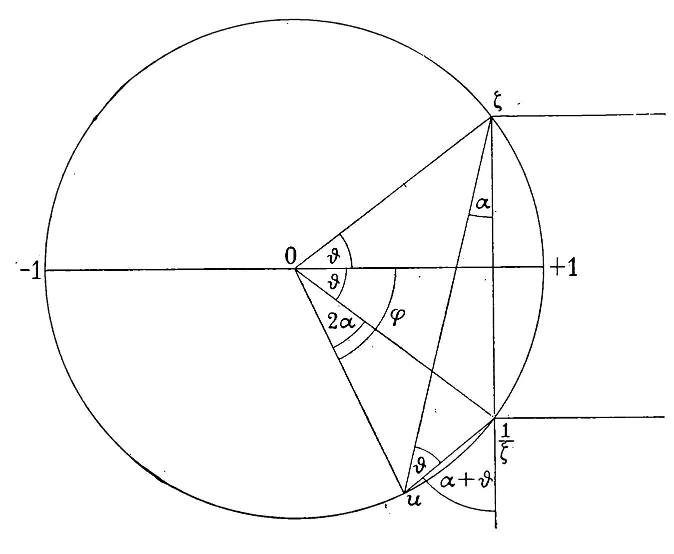


Abb. 33.

34. Rekursionsformeln für $\mathfrak{P}_\nu^\mu(z)$ und $\mathfrak{Q}_\nu^\mu(z)$. Die Formeln (27·1) und (30·1) können wir abgekürzt in folgender Gestalt schreiben:

$$(1)\quad \begin{cases} \mathfrak{P}_\nu^\mu(z) = a_\mu\,(z^2-1)^{\frac{\mu}{2}}\,U_{\nu,\mu}(z), \\ \mathfrak{Q}_\nu^\mu(z) = \dfrac{e^{-i\pi\nu}}{\sin\pi(\nu+\mu)}\,b_\mu\,(z^2-1)^{\frac{\mu}{2}}\,U_{\nu,\mu}(z). \end{cases}$$

Dabei hängen die Koeffizienten a_μ und b_μ nur von μ, aber **nicht** von ν, ab und

$$(2)\quad U_{\nu,\mu}(z) = \int \frac{u^{\nu+\mu}\,du}{(1-2zu+u^2)^{\mu+\frac{1}{2}}},$$

wobei $\overline{C}_5$ der Integrationsweg bei $\mathfrak{P}_\nu^\mu(z)$, C_4' bei $\mathfrak{Q}_\nu^\mu(z)$ ist. Aus (2) erhält man

$$(3)\qquad \frac{d\,U_{\nu,\mu}(z)}{dz} = (2\mu+1)\int \frac{u^{\nu+\mu+1}\,du}{(1-2zu+u^2)^{\mu+\frac{3}{2}}} = (2\mu+1)\,U_{\nu,\mu+1}(z).$$

Ferner ist

$$\frac{d}{du}\frac{z-u}{(1-2zu+u^2)^{\mu+\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{(1-2zu+u^2)^{\mu+\frac{1}{2}}} + \frac{(2\mu+1)(z-u)^2}{(1-2zu+u^2)^{\mu+\frac{3}{2}}}$$
$$= -\frac{2\mu}{(1-2zu+u^2)^{\mu+\frac{1}{2}}} + \frac{(2\mu+1)(z^2-1)}{(1-2zu+u^2)^{\mu+\frac{3}{2}}},$$

somit wird aus (3) mit Rücksicht auf (2), weil der Integrand am Anfang und Ende des Weges denselben Wert annimmt,

$$(z^2-1)\frac{dU_{\nu,\mu}}{dz} = \int u^{\nu+\mu+1}\left[-\frac{2\mu}{(1-2zu+u^2)^{\mu+\frac{1}{2}}} + \frac{d}{du}\frac{z-u}{(1-2zu+u^2)^{\mu+\frac{1}{2}}}\right]du$$
$$= -2\mu\,U_{\nu+1,\mu}(z) - (\nu+\mu+1)\int \frac{(z-u)\,u^{\nu+\mu}}{(1-2zu+u^2)^{\mu+\frac{1}{2}}}\,du$$
$$= -2\mu\,U_{\nu+1,\mu}(z) - (\nu+\mu+1)\,[z\,U_{\nu,\mu}(z) - U_{\nu+1,\mu}(z)]$$

oder

$$(4)\qquad (z^2-1)\frac{dU_{\nu,\mu}}{dz} = (\nu-\mu+1)\,U_{\nu+1,\mu}(z) - (\nu+\mu+1)\,z\,U_{\nu,\mu}(z).$$

Drückt man nun $U_{\nu,\mu}(z)$ nach (1) einmal durch $\mathfrak{P}_\nu^\mu(z)$ und dann durch $\mathfrak{Q}_\nu^\mu(z)$ aus, so ergibt sich aus (4) für $\mathfrak{P}_\nu^\mu(z)$ und $\mathfrak{Q}_\nu^\mu(z)$ die Rekursionsformel

$$(5)\qquad (z^2-1)\frac{df_{\nu,\mu}(z)}{dz} = (\nu-\mu+1)\,f_{\nu+1,\mu}(z) - (\nu+1)\,z\,f_{\nu,\mu}(z),$$

wobei $\mathfrak{P}_\nu^\mu(z)$, bzw. $\mathfrak{Q}_\nu^\mu(z)$ für $f_{\nu,\mu}(z)$ zu setzen ist.

Ersetzen wir ν durch $-\nu-1$ in (4), so folgt

$$(6)\qquad (z^2-1)\frac{dU_{-\nu-1,\mu}}{dz} = -(\nu+\mu)\,U_{-\nu,\mu}(z) + (\nu-\mu)\,z\,U_{-\nu-1,\mu}(z).$$

Drücken wir in dieser Gleichung wieder $U_{\nu,\mu}(z)$ durch $\mathfrak{P}_\nu^\mu(z)$ nach (1) aus und berücksichtigen dabei (17·5), so erhalten wir

$$(7)\qquad (z^2-1)\frac{d\mathfrak{P}_\nu^\mu(z)}{dz} = -(\nu+\mu)\,\mathfrak{P}_{\nu-1}^\mu(z) + \nu z\,\mathfrak{P}_\nu^\mu(z).$$

Nach (22·2) ist ferner

$$(8)\qquad \mathfrak{Q}_{-\nu-1}^\mu(z) = \frac{\sin\pi(\nu+\mu)}{\sin\pi(\nu-\mu)}\,\mathfrak{Q}_\nu^\mu(z) - e^{i\pi\mu}\frac{\pi\cos\pi\nu}{\sin\pi(\nu-\mu)}\,\mathfrak{P}_\nu^\mu(z).$$

Ersetzen wir also schließlich $U_{\nu,\mu}(z)$ mit Hilfe von (1) und (8) durch $\mathfrak{Q}_\nu^\mu(z)$ und beachten, daß $\mathfrak{P}_\nu^\mu(z)$ der Gleichung (7) genügt, so sehen wir, daß auch $\mathfrak{Q}_\nu^\mu(z)$ dieselbe Gleichung befriedigt, d. h. wir erhalten für beide Funktionen die Rekursionsformel

$$(9)\qquad (z^2-1)\frac{df_{\nu,\mu}(z)}{dz} = \nu z f_{\nu,\mu}(z) - (\nu+\mu) f_{\nu-1,\mu}(z).$$

Ziehen wir (9) von (5) ab, so folgt

$$(10)\qquad (\nu-\mu+1) f_{\nu+1,\mu}(z) - (2\nu+1) z f_{\nu,\mu}(z) + (\nu+\mu) f_{\nu-1,\mu}(z) = 0.$$

Durch (10) sind die Formeln (I, 12·1) und (I, 36·1), durch (9) die Formeln (I, 12·7) und die entsprechenden aus (I, 36) auf $\mu \neq 0$ und beliebige Zeiger verallgemeinert.

§ 4. Asymptotische Entwicklungen.

35. Eine Hilfsformel. Für das Folgende berechnen wir $\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \frac{dx}{1+a\sin^2 x}$, wobei a irgendeine komplexe Zahl ist. Die Werte $a \leqq -1$ müssen wir ausschließen, wenn das Integral einen Sinn haben soll. Wir führen die neue Veränderliche $z = \operatorname{tg} x$ ein und erhalten

$$(1)\qquad \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \frac{dx}{1+a\sin^2 x} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+a\sin^2 x} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{1+(1+a)z^2}.$$

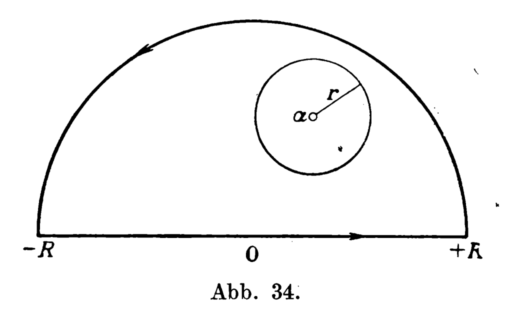


Abb. 34.

Um das letzte Integral zu berechnen, erstrecken wir $\int \frac{dz}{1+(1+a)z^2}$ über den in Abb. 34 mit Pfeilen bezeichneten geschlossenen Weg. Für den vom Kreisbogen herrührenden Teil erhalten wir $iR\int\limits_0^\pi \frac{e^{i\varphi}\,d\varphi}{1+(1+a)R^2e^{2i\varphi}}$;

der Betrag ist daher für alle genügend großen R nicht größer als

$$\int_0^\pi \frac{d\varphi}{\left|\frac{1}{R} + (1+a)Re^{2i\varphi}\right|} < 2\int_0^\pi \frac{d\varphi}{|1+a|R} = \frac{2\pi}{|1+a|R},$$

somit in der Grenze Null für $R \to +\infty$. Der vom geradlinigen Teil herrührende Bestandteil ist für $R \to +\infty$ das Integral (1).

Der Nenner des Integranden hat die Nullstellen $\pm \frac{i}{\sqrt{1+a}}$; sie sind nicht reell, da wir die Werte $a \leqq -1$ ausgeschlossen haben. Eine der Nullstellen, sie heiße α, liegt somit in der oberen Halbebene, und zwar innerhalb des Integrationsweges für alle hinreichend großen R, die andere in der unteren Halbebene, sonach außerhalb. Nach dem CAUCHYschen Satze kann man den Integrationsweg in den kleinen Kreis K mit dem Mittelpunkt α und dem Halbmesser r verbiegen. Man erhält wegen

(2) $$\alpha^2 = -\frac{1}{1+a}$$

mit $z = \alpha + re^{i\varphi}$ und $r \to 0$

$$\int_K \frac{dz}{1+(1+a)z^2} = \frac{1}{1+a}\int_K \frac{dz}{z^2 + \frac{1}{1+a}} = -\alpha^2 \int_K \frac{dz}{(z-\alpha)(z+\alpha)}$$

$$= -\alpha^2 i \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\alpha + re^{i\varphi}} = -\pi i \alpha,$$

infolgedessen

(3) $$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{dx}{1+a\sin^2 x} = -i\alpha.$$

Weil α in der oberen Halbebene liegt und die Multiplikation mit $-i$ eine Drehung um $-\frac{\pi}{2}$ bedeutet, liegt $-i\alpha$ in der rechten Halbebene. Führen wir daher a nach Formel (2) in die Gleichung (3) ein, so ergibt sich

(4) $$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{dx}{1+a\sin^2 x} = \frac{1}{\sqrt{1+a}},$$

wobei jener Wert der Quadratwurzel zu nehmen ist, dessen reeller Teil positiv ist.

36. Asymptotische Entwicklung der Kugelfunktionen. Im folgenden wollen wir Entwicklungen für $P_\nu(\cos\vartheta)$ und $Q_\nu(\cos\vartheta)$ für große reelle Werte von ν herleiten. Wir greifen auf die Formel (27·1) zurück. Sie

lautet für $\mu = 0$ wegen (4·5)

(1) $$\mathfrak{Q}_\nu(z) = \frac{i e^{-i\pi\nu}}{4 \sin \pi\nu} \int\limits_{C_4'} \frac{u^\nu \, du}{(1 - 2zu + u^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Wir lassen z auf der oberen Halbebene an den Punkt $\cos\vartheta \, (0 < \vartheta < \pi)$ heranrücken. Es ist $\zeta = e^{i\vartheta}$. Als neue Veränderliche führen wir t durch die Gleichung

(2) $$u = e^{-i\vartheta}(1 - t)$$

ein. u hat am Beginn des Integrationsweges C_4' im Punkte a' (siehe Ziffer 27) denselben Winkel wie $\frac{1}{\zeta}$, somit $1 - t$ den Winkel 0. Von den beiden Faktoren des Nenners im Integral

$$1 - u\zeta = 1 - ue^{i\vartheta} = t$$

und

$$1 - \frac{u}{\zeta} = 1 - ue^{-i\vartheta} = 1 - e^{-2i\vartheta}(1 - t)$$

hat der erste in a' den Winkel 0, der zweite in b' den Winkel 0. Setzen wir noch

$$|\operatorname{arc}(1 - e^{-2i\vartheta})| < \pi$$

voraus, so ist wegen

$$\operatorname{arc}[1 - e^{-2i\vartheta}(1 - t)] = \operatorname{arc}(1 - e^{-2i\vartheta}) + \operatorname{arc}\left(1 + \frac{t}{e^{2i\vartheta} - 1}\right)$$

auch

$$\left|\operatorname{arc}\left(1 + \frac{t}{e^{2i\vartheta} - 1}\right)\right| < \pi \text{ in } b'.$$

Es wird

(3) $$\int \frac{u^\nu \, du}{(1 - 2zu + u^2)^{\frac{1}{2}}} = -e^{-(\nu+1)i\vartheta} \int \frac{t^{-\frac{1}{2}}(1 - t)^\nu \, dt}{[1 - e^{-2i\vartheta}(1 - t)]^{\frac{1}{2}}}$$

$$= -\frac{e^{-(\nu+1)i\vartheta}}{(1 - e^{-2i\vartheta})^{\frac{1}{2}}} \int \frac{t^{-\frac{1}{2}}(1 - t)^\nu \, dt}{\left(1 + \frac{t}{e^{2i\vartheta} - 1}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= -\frac{e^{-\left(\nu+\frac{1}{2}\right)i\vartheta}}{(e^{i\vartheta} - e^{-i\vartheta})^{\frac{1}{2}}} \int t^{-\frac{1}{2}}(1 - t)^\nu \left(1 + \frac{t}{e^{2i\vartheta} - 1}\right)^{-\frac{1}{2}} dt.$$

Der Integrationsweg in der t-Ebene ist gemäß Ziffer 27 und (2) ein Doppelumlauf um die Punkte 0 und 1. Ist $\nu > -1$, so können wir ihn nach dem Vorbild von Ziffer 16 auf die Strecke (0, 1) zusammenziehen. Man erhält

$$\int = \int_1^0 - \int_0^1 - e^{2i\pi\nu}\int_1^0 + e^{2i\pi\nu}\int_0^1 = (-2 + 2e^{2i\pi\nu})\int_0^1 = 4ie^{i\pi\nu}\sin\pi\nu\int_0^1 .$$

Damit ergibt sich aus (1) und (3) mit $h > 0$

$$(4)\quad \lim_{h\to 0}\mathfrak{Q}_\nu(\cos\vartheta + hi) = \frac{e^{-\left[\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\vartheta+\frac{\pi}{4}\right]i}}{\sqrt{2\sin\vartheta}}\int_0^1 t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^\nu\left(1+\frac{t}{e^{2i\vartheta}-1}\right)^{-\frac{1}{2}}dt.$$

Nach (35·4) ist

$$\left(1+\frac{t}{e^{2i\vartheta}-1}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{dv}{1+\frac{t}{e^{2i\vartheta}-1}\sin^2 v}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi\left[1+\frac{t\sin^2 v}{1-e^{2i\vartheta}}+\frac{t^2\sin^4 v}{(1-e^{2i\vartheta})^2}+\cdots+\frac{t^k\sin^{2k} v}{\left(1+\frac{t\sin^2 v}{e^{2i\vartheta}-1}\right)(1-e^{2i\vartheta})^k}\right]dv,$$

daher wird aus (4)

$$(5)\quad \lim_{h\to 0}\mathfrak{Q}_\nu(\cos\vartheta + hi)$$

$$= \frac{e^{-\left[\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\vartheta+\frac{\pi}{4}\right]i}}{\pi\sqrt{2\sin\vartheta}}\int_0^\pi\int_0^1\left[t^{-\frac{1}{2}}+\frac{t^{\frac{1}{2}}\sin^2 v}{1-e^{2i\vartheta}}+\frac{t^{\frac{3}{2}}\sin^4 v}{(1-e^{2i\vartheta})^2}\right.$$

$$\left.+\cdots+\frac{t^{k-\frac{1}{2}}\sin^{2k} v}{(1-e^{2i\vartheta})^k\left(1+\frac{t\sin^2 v}{e^{2i\vartheta}-1}\right)}\right](1-t)^\nu\,dv\,dt.$$

Nun ist für positive ganzzahlige n durch fortgesetzte teilweise Integration

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin^{2n} v\,dv = \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n}$$

und gemäß (7·1), (7·8), (4·1) und (4·5)

$$\int_0^1 t^{n-\frac{1}{2}}(1-t)^\nu\,dt = B\left(n+\frac{1}{2},\ \nu+1\right)$$

$$= \frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma(\nu+1)}{\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}+n\right)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\left(n-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(\nu+1)}{\left(\nu+\frac{3}{2}\right)\left(\nu+\frac{5}{2}\right)\cdots\left(\nu+\frac{1}{2}+n\right)\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)}$$

$$= \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+1)}{(2\nu+3)(2\nu+5)\cdots(2\nu+1+2n)\,\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)},$$

daher wird aus (5)

(6)
$$\lim_{h\to 0}\mathfrak{Q}_\nu(\cos\vartheta+hi)$$

$$= e^{-\left[\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\vartheta+\frac{\pi}{4}\right]i}\,\frac{\Gamma(\nu+1)\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)}\left[\frac{1}{(2\sin\vartheta)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1^2}{2(2\nu+3)}\,\frac{e^{-\left(\vartheta+\frac{\pi}{2}\right)i}}{(2\sin\vartheta)^{\frac{3}{2}}}\right.$$

$$+ \frac{1^2\cdot 3^2}{2\cdot 4(2\nu+3)(2\nu+5)}\,\frac{e^{-2\left(\vartheta+\frac{\pi}{2}\right)i}}{(2\sin\vartheta)^{\frac{5}{2}}} - \cdots$$

$$\left. + \frac{(-1)^{k-1}\cdot 1^2\cdot 3^2\cdots(2k-3)^2\,e^{-(k-1)\left(\vartheta+\frac{\pi}{2}\right)i}}{2\cdot 4\cdots(2k-2)(2\nu+3)(2\nu+5)\cdots(2\nu+2k-1)(2\sin\vartheta)^{k-\frac{1}{2}}}\right]$$

$$+ \frac{e^{-\left[\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\vartheta+\frac{\pi}{4}\right]i}}{\pi\sqrt{2\sin\vartheta}}\int_0^\pi\int_0^1 \frac{(-1)^k\,t^{k-\frac{1}{2}}(1-t)^\nu\sin^{2k}v}{(2i\sin\vartheta)^k}\,e^{-k\vartheta i}\left(1+\frac{t\sin^2 v}{e^{2i\vartheta}-1}\right)^{-1}dv\,dt.$$

37. Abschätzung des Restgliedes. Um das Restglied abzuschätzen, beachten wir, daß für den in Frage kommenden Bereich

(1)
$$\left|1+\frac{t\sin^2 v}{e^{2i\vartheta}-1}\right| = \left|1-\frac{i\,t\sin^2 v}{2\sin\vartheta}(\cos\vartheta-i\sin\vartheta)\right|$$

$$= \left|1-\frac{t}{2}\sin^2 v-\frac{i}{2}t\operatorname{ctg}\vartheta\sin^2 v\right|$$

$$\geqq 1-\frac{t}{2}\sin^2 v \geqq \frac{1}{2}$$

ist. Der Betrag des Restgliedes in (36·6) ist daher nicht größer als

$$\frac{2\sqrt{\pi}}{(2\sin\vartheta)^{k+\frac{1}{2}}}\frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)}\frac{1^2\cdot 3^2\cdots(2k-1)^2}{2\cdot 4\cdots 2k(2\nu+3)(2\nu+5)\cdots(2\nu+2k+1)},$$

d. h. nicht größer als der doppelte Betrag des entsprechenden Gliedes in der Entwicklung mit $(2\sin\vartheta)^{k+\frac{1}{2}}$ im Nenner. Nach (23·6) ist

$$\lim_{h\to 0}\mathfrak{Q}_\nu(\cos\vartheta+hi)=Q_\nu(\cos\vartheta)-\frac{\pi i}{2}P_\nu(\cos\vartheta),$$

somit erhält man $Q_\nu(\cos\vartheta)$ und $P_\nu(\cos\vartheta)$, wenn man (36·6) in den reellen und imaginären Teil spaltet, also

$$(2)\qquad P_\nu(\cos\vartheta)=\frac{2\Gamma(\nu+1)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)}\left\{\frac{\cos\left[\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\vartheta-\frac{\pi}{4}\right]}{(2\sin\vartheta)^{\frac{1}{2}}}+\frac{1^2}{2(2\nu+3)}\frac{\cos\left[\left(\nu+\frac{3}{2}\right)\vartheta-\frac{3\pi}{4}\right]}{(2\sin\vartheta)^{\frac{3}{2}}}+\cdots\right.$$
$$\left.+\frac{1^2\cdot 3^2\cdots(2k-3)^2}{2\cdot 4\cdots(2k-2)(2\nu+3)(2\nu+5)\cdots(2\nu+2k-1)}\frac{\cos\left[\left(\nu+\frac{2k-1}{2}\right)\vartheta-\frac{(2k-1)\pi}{4}\right]}{(2\sin\vartheta)^{\frac{2k-1}{2}}}\right\}$$
$$+p_{\nu,k}(\cos\vartheta),$$

wobei

$$|p_{\nu,k}(\cos\vartheta)|\leqq\frac{4\Gamma(\nu+1)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)}\frac{1^2\cdot 3^2\cdots(2k-1)^2}{2\cdot 4\cdots 2k(2\nu+3)(2\nu+5)\cdots(2\nu+2k+1)}\frac{1}{(2\sin\vartheta)^{k+\frac{1}{2}}}$$

ist, und

$$Q_\nu(\cos\vartheta)=\sqrt{\pi}\frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)}\left\{\frac{\cos\left[\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\vartheta+\frac{\pi}{4}\right]}{(2\sin\vartheta)^{\frac{1}{2}}}-\frac{1^2}{2(2\nu+3)}\frac{\cos\left[\left(\nu+\frac{3}{2}\right)\vartheta+\frac{3\pi}{4}\right]}{(2\sin\vartheta)^{\frac{3}{2}}}+\cdots\right.$$
$$\left.+\frac{(-1)^{k-1}\cdot 1^2\cdot 3^2\cdots(2k-3)^2}{2\cdot 4\cdots(2k-2)(2\nu+3)(2\nu+5)\cdots(2\nu+2k-1)}\frac{\cos\left[\left(\nu+\frac{2k-1}{2}\right)\vartheta+\frac{(2k-1)\pi}{4}\right]}{(2\sin\vartheta)^{\frac{2k-1}{2}}}\right\}$$
$$+q_{\nu,k}(\cos\vartheta),$$

wobei

$$|q_{\nu,k}(\cos\vartheta)| \leqq 2\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)}\,\frac{1^2\cdot 3^2\cdots(2k-1)^2}{2\cdot 4\cdots 2k\,(2\nu+3)\,(2\nu+5)\cdots(2\nu+2k+1)}\,\frac{1}{(2\sin\vartheta)^{k+\frac{1}{2}}}$$

ist.

Aus (6·4) erhalten wir, wenn ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3, ϑ_4 positive echte Brüche sind,

$$\ln\frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)} = \left(\nu+\frac{1}{2}\right)\ln(\nu+1)-(\nu+1)+\frac{1}{12(\nu+1)}-\frac{\vartheta_1}{360(\nu+1)^3}$$

$$-(\nu+1)\ln\left(\nu+\frac{3}{2}\right)+\left(\nu+\frac{3}{2}\right)-\frac{1}{12\left(\nu+\frac{3}{2}\right)}+\frac{\vartheta_2}{360\left(\nu+\frac{3}{2}\right)^3}$$

$$=\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\left(\ln\nu+\frac{1}{\nu}-\frac{1}{2\nu^2}+\frac{\vartheta_3}{3\nu^3}\right)+\frac{1}{2}$$

$$-(\nu+1)\left(\ln\nu+\frac{3}{2\nu}-\frac{9}{8\nu^2}+\frac{9\vartheta_4}{8\nu^3}\right)$$

$$+\frac{1}{24(\nu+1)\left(\nu+\frac{3}{2}\right)}-\frac{\vartheta_1}{360(\nu+1)^3}+\frac{\vartheta_2}{360\left(\nu+\frac{3}{2}\right)^3}$$

$$=-\frac{1}{2}\ln\nu-\frac{3}{8\nu}+\frac{7}{8\nu^2}+\frac{\vartheta_3}{3}\left(\frac{1}{\nu^2}+\frac{1}{2\nu^3}\right)-\frac{9\vartheta_4}{8}\left(\frac{1}{\nu^2}+\frac{1}{\nu^3}\right)$$

$$+\frac{1}{12(\nu+1)(2\nu+3)}-\frac{\vartheta_1}{360(\nu+1)^3}+\frac{\vartheta_2}{45(2\nu+3)^3},$$

daher

(3) $$\frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)}=\frac{1}{\nu^{\frac{1}{2}}}\left(1-\frac{3}{8\nu}\right)+\frac{R_\nu}{\nu^{\frac{5}{2}}},$$

wobei $|R_\nu|$ für $\nu\to+\infty$ beschränkt bleibt. Es ist also

(4) $$\frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)}<\frac{1}{\sqrt{\nu}}$$

für alle genügend großen ν.

Diese Behauptung gilt für alle $\nu>0$. Denn wenn ν so groß ist, daß

$$\frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)}<\frac{1}{\sqrt{\nu}}$$

ist, so folgt daraus, weil nach (4·1)

$$\frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)} = \frac{\nu}{\nu+\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}$$

ist,

$$\frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} < \left(1+\frac{1}{2\nu}\right)\frac{1}{\sqrt{\nu}} < \frac{1}{\sqrt{\nu-1}};$$

denn

$$\left(\frac{\nu}{\nu-1}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(1-\frac{1}{\nu}\right)^{-\frac{1}{2}} > 1+\frac{1}{2\nu},$$

solange $\nu > 1$ ist. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens ergibt sich die obige Behauptung.

Damit erhält man für positive ν

$$(5) \qquad |p_{\nu,k}(\cos\vartheta)|, \quad |q_{\nu,k}(\cos\vartheta)| < \frac{A_k}{(\nu\sin\vartheta)^{k+\frac{1}{2}}},$$

wobei A_k von ν und ϑ nicht mehr abhängt. Ist außerdem $\varepsilon \leqq \vartheta \leqq \pi - \varepsilon$, so gilt

$$(6) \qquad |p_{\nu,k}(\cos\vartheta)|, \quad |q_{\nu,k}(\cos\vartheta)| < \frac{B_k}{\nu^{k+\frac{1}{2}}},$$

wobei B_k von ν und ϑ nicht mehr abhängt, wohl aber von ε.

Führen wir (3) in (2) ein, so erhalten wir für $\varepsilon \leqq \vartheta \leqq \pi - \varepsilon$

$$(7) \qquad \begin{cases} P_\nu(\cos\vartheta) = \sqrt{\dfrac{2}{\nu\pi\sin\vartheta}}\sin\left[\left(\nu+\dfrac{1}{2}\right)\vartheta+\dfrac{\pi}{4}\right] + p_\nu(\cos\vartheta), \\ Q_\nu(\cos\vartheta) = \sqrt{\dfrac{\pi}{2\nu\sin\vartheta}}\cos\left[\left(\nu+\dfrac{1}{2}\right)\vartheta+\dfrac{\pi}{4}\right] + q_\nu(\cos\vartheta), \end{cases}$$

wobei $|p_\nu(\cos\vartheta)|$, $|q_\nu(\cos\vartheta)| < \dfrac{C}{\nu^{\frac{3}{2}}}$ ist und C nur von ε abhängt.

Um eine noch weitergehende Abschätzung zu erhalten, greifen wir auf die Formel (36·4) zurück. Nach (23·6), (1), (7·1), (7·8), (4·5) und (4) ist

$$|Q_\nu(\cos\vartheta)|, \ \frac{\pi}{2}|P_\nu(\cos\vartheta)| \leqq \frac{1}{\sqrt{2\sin\vartheta}}\int_0^1 t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^\nu \left|1+\frac{t}{e^{2i\vartheta}-1}\right|^{-\frac{1}{2}} dt$$

$$\leqq \frac{1}{\sqrt{\sin\vartheta}}\int_0^1 t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^\nu\, dt$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{\sin\vartheta}}\,\frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)} < \sqrt{\frac{\pi}{\nu\sin\vartheta}},$$

also

$$
(8) \qquad \begin{cases} |P_\nu(\cos\vartheta)| < \dfrac{2}{\sqrt{\pi\nu\sin\vartheta}}, \\[2ex] |Q_\nu(\cos\vartheta)| < \sqrt{\dfrac{\pi}{\nu\sin\vartheta}} \end{cases}
$$

für $\nu > 0$ und $0 < \vartheta < \pi$.

Es gilt demnach statt der in Ziffer (I, 24) erhaltenen die schärfere Abschätzung

$$
|P_\nu(\xi)| < \frac{2}{\sqrt{\pi\nu}\sqrt[4]{1-\xi^2}}.
$$

Damit haben wir die Gültigkeit des Entwicklungssatzes von Ziffer (I, 30) auf den Fall ausgedehnt, daß $\frac{|f(x)|}{\sqrt[4]{1-x^2}}$ integrierbar bleibt. Die Abschätzung (8) für $P_\nu(\cos\vartheta)$ stammt von STIELTJES[1]), aber nur in der Beschränkung auf positive ganzzahlige Zeiger. Für beliebige positive Zeiger wurde der Beweis erst von HOBSON[2]) erbracht, der die Abschätzung auch auf $Q_\nu(\cos\vartheta)$ ausdehnte.

Die erste der Formeln (7) für ganzzahlige $\nu = n$ ohne Restglied findet sich zuerst bei LAPLACE[3]). HEINE[4]) gab für beide Kugelfunktionen asymptotische Entwicklungen für positive ganzzahlige Zeiger und komplexe Veränderliche, aber ohne Restglied. Die erste genaue Abschätzung des Restgliedes stammt von DARBOUX[5]). Auch er beschränkte sich auf den Fall positiver ganzzahliger Zeiger bei komplexen Veränderlichen. Erst HOBSON[6]) gab eine Abschätzung für den allgemeinen Fall.

38. Integraldarstellung für $\mathfrak{P}_\nu(z)$. Für Anwendungen in der Physik ist es wichtig, auch eine asymptotische Entwicklung von $P_\nu(z)$ für großes $|\nu|$ zu haben, wenn ν nicht reell ist. Wir leiten zu diesem Zweck zuerst eine passende Integraldarstellung für $P_\nu(z)$ her und gehen dazu von der Formel

$$
(1) \qquad \mathfrak{P}_\nu(z) = F\left(\nu+1, -\nu, 1, \frac{1-z}{2}\right)
$$

aus. Sie folgt aus (17·3) für $m = 0$ mit Hilfe von (4·2).

---

1) TH. J. STIELTJES, Ann. de Toulouse 4 (1890) 61.

2) E. W. HOBSON, Proc. London. Math. Soc., 2. Serie, 7 (1908) 25 und 30 (1929) 239.

3) P. S. DE LAPLACE, Méc. céleste, Bd. 5, Buch 11 und Ergänzung zu Bd. 5.

4) Siehe das in Ziffer 32, Fußnote 1) genannte Buch, S. 175—182.

5) G. DARBOUX, J. Math. pur. appl., 3. Serie, 4 (1878) 5 und 377.

6) E. W. HOBSON, Phil. Trans. 187 (1896) 486.

Wir untersuchen $\int\limits_{C_6} (1-t^2)^\nu (z-t)^{-\nu-1}\,dt$. Dabei sei $\Re(\nu) \geqq -1+\delta$ (δ positiv beliebig klein), $\Re\left(\frac{\nu}{i}\right)$ beschränkt, z liege in der oberen Halbebene, wobei die reelle Achse durch eine beliebig nahe Parallele und das Unendliche durch einen beliebig großen Halbkreis um den Nullpunkt ausgeschlossen sei. Der Integrationsweg C_6 soll in der oberen Halbebene liegen, im Punkte $+1$ beginnen, den Punkt z im negativen Sinn umlaufen, dabei -1 außerhalb liegen lassen und wieder nach $+1$ zurückkehren.

Das Integral konvergiert absolut und gleichmäßig bezüglich ν und z in den angegebenen Bereichen. Denn in einer hinreichend kleinen Umgebung des Punktes 1 gilt die Abschätzung

$$|(1-t^2)^\nu (z-1)^{-\nu-1}| < M\,|1-t|^{-1+\delta},$$

somit für den in dieser Umgebung liegenden Teil der Kurve C_6, wenn s den Bogen von 1 bis t bedeutet,

$$\left|\int (1-t^2)^\nu (z-t)^{-\nu-1}\,dt\right| < M\int\limits_0^\varepsilon s^{-1+\delta}\,ds = M\frac{\varepsilon^\delta}{\delta} \to 0$$

mit $\varepsilon \to 0$ unabhängig von ν und z. Das Integral ist sonach in den genannten Bereichen eine analytische Funktion von ν und z.

Wir setzen fest: $\operatorname{arc}(1 \pm t) = 0$ für $-1 \leqq t \leqq +1$, $\operatorname{arc}(z-t) = \operatorname{arc}(z-1)$ im Punkte $t=1$ am Beginn des Weges, $t-1 = e^{i\pi}(1-t)$. Es ist also $|\operatorname{arc}(t-1)| < \pi$ auf C_6. Die Winkel von z und $z \pm 1$ sollen wie immer gemäß der Übereinkunft von Ziffer 15 gewählt sein.

Wie in Ziffer 16 bilden wir die t-Ebene durch die Gleichung

$$t - z = (z-1)(u-1)$$

auf die u-Ebene ab. C_6 geht dabei in eine Kurve C_6' über, die, von 0 ausgehend, den Punkt 1 im negativen Sinn umläuft und dann nach 0 zurückkehrt. Nach den Festsetzungen über die Winkel ist

$$|\operatorname{arc} u| = \left|\operatorname{arc}\frac{t-1}{z-1}\right| < \pi$$

und

$$|\operatorname{arc}[2+(z-1)u]| = |\operatorname{arc}(t+1)| < \pi$$

auf C_6', ferner

$$\operatorname{arc}(1-u) = \begin{cases} 0 \\ -2\pi \end{cases} \text{am} \begin{cases} \text{Anfang} \\ \text{Ende} \end{cases} \text{von } C_6'$$

und $u-1 = e^{i\pi}(1-u)$. Schließlich können wir C_6 und damit C_6' nach dem CAUCHYschen Satz so verbiegen, daß außerdem auf dem Wege dauernd $|(z-1)u| < 2$ ist, wenn wir noch $|z-1| < 2$ voraussetzen.

Dann wird

$$(2)\quad \int_{C_6} (1-t^2)^\nu (z-t)^{-\nu-1}\, dt$$

$$= -\int_{C_6'} u^\nu (u-1)^{-\nu-1} [2+(z-1)u]^\nu\, du$$

$$= 2^\nu e^{-i\pi\nu} \int_{C_6'} u^\nu (1-u)^{-\nu-1} \left(1 - \frac{1-z}{2} u\right)^\nu du$$

$$= 2^\nu e^{-i\pi\nu} \left[\int_{C_6'} u^\nu (1-u)^{-\nu-1}\, du \right.$$

$$\left. + \int_{C_6'} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \nu(\nu-1)\cdots(\nu-n+1) \left(\frac{1-z}{2}\right)^n u^{\nu+n} (1-u)^{-\nu-1}\, du \right].$$

Wir können Summen- und Integralzeichen vertauschen. Zufolge der gemachten Voraussetzungen konvergiert nämlich

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \nu(\nu-1)\cdots(\nu-n+1) \left(\frac{1-z}{2}\right)^n u^n$$

auf C_6' gleichmäßig, d. h. es ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} = \sum_{n=1}^{k} + R_k,$$

wobei $|R_k| < \varepsilon$ für alle $k > N$, wobei N von z und u nicht abhängt. Somit ist

$$\int_{C_6'} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \nu(\nu-1)\cdots(\nu-n+1) \left(\frac{1-z}{2}\right)^n u^{\nu+n} (1-u)^{-\nu-1}\, du$$

$$= \sum_{n=1}^{k} \frac{(-1)^n}{n!} \nu(\nu-1)\cdots(\nu-n+1) \left(\frac{1-z}{2}\right)^n \int_{C_6'} u^{\nu+n} (1-u)^{-\nu-1}\, du$$

$$+ \int_{C_6'} R_k u^\nu (1-u)^{-\nu-1}\, du,$$

wobei

$$\left| \int_{C_6'} R_k u^\nu (1-u)^{-\nu-1}\, du \right| < \varepsilon \int_{C_6'} |u^\nu (1-u)^{-\nu-1}\, du|$$

beliebig klein wird wegen der absoluten Konvergenz von $\int_{C_6'} u^\nu (1-u)^{-\nu-1}\, du$, die man ebenso beweist wie vorher die von $\int_{C_6} (1-t^2)^\nu (z-t)^{-\nu-1}\, dt$.

Nach dem Verfahren von Ziffer 18 und (I, 16) ist für $-1 < \Re(\nu) < 0$ gemäß (7·1), (7·8), (4·1), (4·3), (4·4)

$$\int_{C_6'} u^{\nu+n}(1-u)^{-\nu-1}\,du = B(\nu+n+1, -\nu)\,[1-e^{2i\pi(\nu+1)}]$$

$$= (1-e^{2i\pi\nu})\frac{\Gamma(\nu+n+1)\,\Gamma(-\nu)}{\Gamma(n+1)}$$

$$= -2\,i\,e^{i\pi\nu}\sin\pi\nu\,\frac{(\nu+n)(\nu+n-1)\cdots(\nu+1)}{n!}\,\Gamma(\nu+1)\,\Gamma(-\nu)$$

$$= 2\pi i\,e^{i\pi\nu}\,\frac{(\nu+n)(\nu+n-1)\cdots(\nu+1)}{n!},$$

$$\int_{C_6'} u^{\nu}(1-u)^{-\nu-1}\,du = -(1-e^{2i\pi\nu})\frac{\pi}{\sin\pi\nu} = 2\pi i\,e^{i\pi\nu}.$$

Damit wird aus (2) nach (8·6)

(3) $$\int_{C_6}(1-t^2)^{\nu}(z-t)^{-\nu-1}\,dt$$

$$= 2^{1+\nu}\pi i\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+n)(-\nu)(-\nu+1)\cdots(-\nu+n-1)}{(n!)^2}\left(\frac{1-z}{2}\right)^n\right]$$

$$= 2^{1+\nu}\pi i\,F\left(\nu+1, -\nu, 1, \frac{1-z}{2}\right)$$

oder gemäß (1)

(4) $$\mathfrak{P}_\nu(z) = \frac{1}{2^{1+\nu}\pi i}\int_{C_6}(1-t^2)^{\nu}(z-t)^{-\nu-1}\,dt.$$

Diese Formel gilt durch analytische Fortsetzung, solange beide Seiten analytische Funktionen von ν und z sind, allerdings mit der Voraussetzung, daß z in der oberen Halbebene liegt. Diese Beschränkung ist durch die Festsetzungen über die Winkel bedingt.

39. Umformung der Darstellung. Wir schreiben nun

(1) $$\int_{C_6}(1-t^2)^{\nu}(z-t)^{-\nu-1}\,dt = I_2 - I_1.$$

Dabei möge I_1 das über denselben Integranden längs der Strecke $(-1, +1)$ erstreckte Integral bedeuten. Die Strecke können wir gemäß dem CAUCHYschen Satze ohne den Wert von I_1 zu ändern, zufolge der Konvergenz des Integrals nach dem Vorbild von (I, 16) stetig in eine die Punkte ± 1 verbindende Kurve verbiegen, wenn dabei der Punkt z nicht überstrichen wird (z. B. in Abb. 35 die Kurve in der unteren Halbebene). Für I_2 haben wir dann nach (1) das um I_1 vermehrte Integral der vorigen Ziffer zu setzen. Der Integrationsweg von I_2 besteht also aus der Strecke

$(-1, +1)$ und der Schlinge um den Punkt z. Er kann nach dem CAUCHYschen Satz zufolge der Konvergenz des Integrals in den Weg von Abb. 36 oder in die Kurve in der oberen Halbebene von Abb. 35 verbogen werden, ohne daß der Wert von I_2 geändert würde.

Um den stetigen Anschluß an die in der vorigen Ziffer getroffenen Festsetzungen über die Winkel zu erwirken, setzen wir $\operatorname{arc}(1 \pm t) = 0$

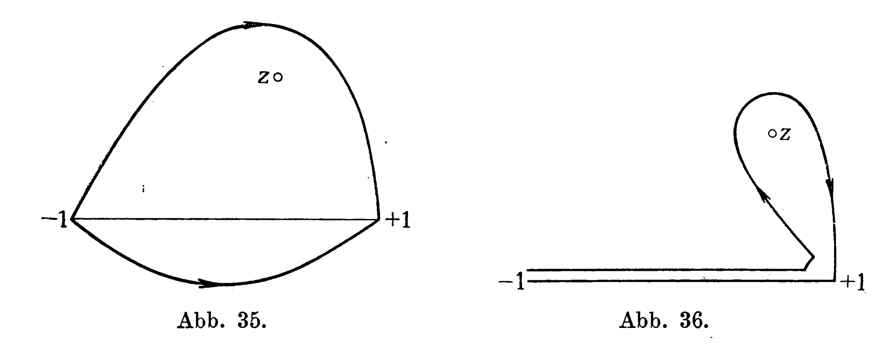


Abb. 35. Abb. 36.

für $-1 \leqq t \leqq +1$ und $\operatorname{arc}(z-t) = \operatorname{arc}(z+1)$ im Punkte $t = -1$. Damit erhält man aus (38·4) und (1) die im folgenden benötigte Integraldarstellung

$$\mathfrak{P}_\nu(z) = \frac{I_2 - I_1}{2^{1+\nu}\pi i}. \tag{2}$$

40. Sattelpunktverfahren. Um asymptotische Entwicklungen der beiden Integrale I_1 und I_2 für große $|\nu|$ zu erhalten, gehen wir so vor: wir schreiben den Integranden in der Gestalt $(z-t)^{-1} e^{-\nu \ln \frac{z-t}{1-t^2}}$. Sein Betrag ist $|z-t|^{-1} e^{-\Re\left(\nu \ln \frac{z-t}{1-t^2}\right)}$.

Wir werden nun versuchen, mit Hilfe des CAUCHYschen Satzes ohne Änderung des Integralwertes den Integrationsweg so zu verbiegen, daß auf ihm $\Re\left(\nu \ln \frac{z-t}{1-t^2}\right)$ möglichst rasch bis zu einem kleinsten Wert abnimmt und dann ebenfalls wieder möglichst rasch ansteigt. Dann kommt nämlich für die Berechnung des Integrals nur die unmittelbare Umgebung dieses kleinsten Wertes in Frage. Es sei $u + iv = \nu \ln \frac{z-t}{1-t^2}$ die Zerlegung dieser Funktion in ihren reellen und imaginären Teil, ebenso

$$t = X + iY \tag{1}$$

die von t. Wir haben also die Richtung schnellster Änderung der Funktion $u(X, Y)$ zu suchen. Diese ist durch $\operatorname{grad} u$ gegeben, somit senkrecht

zu den Kurven $u(X, Y) = \text{const}$, d. h. durch die Kurven $v(X, Y) = \text{const}$ gegeben.

Man kann das auch so erkennen: die Änderung einer analytischen Funktion ist in unmittelbarer Umgebung einer Stelle proportional der Ableitung, also von der Richtung unabhängig. Soll demnach in einer bestimmten Richtung die Änderung des reellen Teiles am größten sein, so muß die des imaginären am kleinsten, d. h. Null sein.

Wir suchen hiernach das Integral längs einer Kurve zu erstrecken, auf welcher der imaginäre Teil v von $\nu \ln \frac{z-t}{1-t^2}$ fest bleibt, und auf ihr den Punkt zu bestimmen, in dem u seinen kleinsten Wert annimmt. Die Ableitungen von u und v in Richtung dieser Kurve müssen daher verschwinden, somit auch die Ableitung der Funktion nach t. An dieser Stelle hat u insofern einen kleinsten Wert, wenn man ihn mit den Werten von u auf der Kurve $v = \text{const}$ vergleicht, dagegen nicht, wenn man ihn mit allen Werten der zweidimensionalen Umgebung der Stelle in der (X, Y)-Ebene vergleicht. Denn u hat als Potentialfunktion niemals einen größten oder kleinsten Wert im Innern eines Regularitätsbereiches. Die Fläche $Z = u(X, Y)$ hat somit an der betreffenden Stelle einen Sattelpunkt. Daher stammt der Name des Verfahrens.

Es besteht also zusammengefaßt in folgendem: wir bestimmen die Sattelpunkte, d. h. jene Werte t_0 von t, für die $\frac{d}{dt} \ln \frac{z-t}{1-t^2} = 0$ ist, und verbiegen den Integrationsweg womöglich in diejenige durch den Sattelpunkt gehende Kurve, längs welcher sich der imaginäre Teil von $\nu \ln \frac{z-t}{1-t^2}$ nicht ändert.

Es ist für das Folgende praktisch

$$z = \operatorname{Cof} \zeta \tag{2}$$

zu setzen und $\zeta = \xi + i\eta$ in seinen reellen und imaginären Teil zu zerlegen. Für z ergibt sich damit die Zerlegung

$$z = \operatorname{Cof} \xi \cos \eta + i \operatorname{Sin} \xi \sin \eta . \tag{3}$$

Weil z in der oberen Halbebene liegen soll, können wir $\xi > 0$ und $0 < \eta < \pi$ annehmen.

Nun ist

$$\frac{d}{dt} \ln \frac{z-t}{1-t^2} = \frac{1}{t-z} + \frac{2t}{1-t^2}, \tag{4}$$

daher für die Sattelpunkte t_0

$$t_0^2 - 2zt_0 + 1 = 0,$$

somit

$$t_0 = e^{\pm \zeta} \quad \text{und} \quad \frac{z - t_0}{1 - t_0^2} = \frac{1}{2} e^{\mp \zeta}$$

mit $\operatorname{arc} \frac{z - t_0}{1 - t_0^2} = \mp \eta + 2 k \pi$ (k ganz). Für $-1 < t < +1$ ist nach den Festsetzungen über die Winkel $\left| \operatorname{arc} \frac{z - t}{1 - t^2} \right| < \pi$. Aus Stetigkeitsgründen ergibt sich danach für die durch t_0 gehende Kurve $v = \text{const}$

$$(5) \quad \begin{cases} \Re\left(\frac{1}{i} \ln \frac{z - t}{1 - t^2}\right) = \Re\left(\frac{1}{i} \ln \frac{z - t_0}{1 - t_0^2}\right) \quad \text{mit } k = 0 \\ \text{oder} \\ \Re\left(\frac{1}{i} \ln \frac{z - t}{1 - t^2}\right) = \mp \eta \\ \text{oder} \\ \Re\left[\frac{1}{i}\left(\ln \frac{z - t}{1 - t^2} + \ln 2 e^{\pm \zeta}\right)\right] = 0. \end{cases}$$

41. Gleichung des Integrationsweges. Wir wollen nun die Gleichung der Kurve (40·5) in rechtwinkligen Koordinaten (X, Y) aufstellen. Nach (40·1) und (40·3) ist

$$\frac{z - t}{1 - t^2} = \frac{[X - \operatorname{Cof} \xi \cos \eta + i (Y - \operatorname{Sin} \xi \sin \eta)] (X^2 - Y^2 - 1 - 2 i X Y)}{(X^2 - Y^2 - 1)^2 + 4 X^2 Y^2},$$

$$\operatorname{tg} \Re\left(\frac{1}{i} \ln \frac{z - t}{1 - t^2}\right)$$
$$= \frac{- Y (X^2 + Y^2 + 1) - (X^2 - Y^2 - 1) \operatorname{Sin} \xi \sin \eta + 2 X Y \operatorname{Cof} \xi \cos \eta}{X (X^2 + Y^2 - 1) - (X^2 - Y^2 - 1) \operatorname{Cof} \xi \cos \eta - 2 X Y \operatorname{Sin} \xi \sin \eta},$$

somit nach (40·5)

$$(1) \quad Y (X^2 + Y^2 + 1) + (X^2 - Y^2 - 1) \operatorname{Sin} \xi \sin \eta - 2 X Y \operatorname{Cof} \xi \cos \eta$$
$$= \pm \operatorname{tg} \eta \, [X (X^2 + Y^2 - 1) - (X^2 - Y^2 - 1) \operatorname{Cof} \xi \cos \eta - 2 X Y \operatorname{Sin} \xi \sin \eta].$$

Wir können uns in dieser Gleichung auf das obere Zeichen beschränken; denn die Gleichung mit dem unteren Zeichen erhalten wir, wenn wir bei ξ und η gleichzeitig das Zeichen ändern, d. h. ζ durch $-\zeta$ ersetzen oder die beiden Sattelpunkte vertauschen.

Wir multiplizieren Gleichung (1) mit $\cos \eta$ und schaffen alle Glieder auf eine Seite:

$$(Y \cos \eta - X \sin \eta) (X^2 + Y^2) + Y \cos \eta + X \sin \eta$$
$$+ (X^2 - Y^2 - 1) (\operatorname{Sin} \xi + \operatorname{Cof} \xi) \sin \eta \cos \eta$$
$$- 2 X Y (\operatorname{Cof} \xi \cos^2 \eta - \operatorname{Sin} \xi \sin^2 \eta) = 0.$$

Diese Gleichung läßt sich auch so schreiben:

$$(Y\cos\eta - X\sin\eta)\,[X(X - e^{\xi}\cos\eta) + Y(Y - e^{\xi}\sin\eta) + e^{\xi}(X\cos\eta + Y\sin\eta)] + Y\cos\eta + X\sin\eta + (X^2 - Y^2 - 1)\,e^{\xi}\sin\eta\cos\eta - XY\,[e^{\xi}(\cos^2\eta - \sin^2\eta) + e^{-\xi}] = 0$$

oder

$$(Y\cos\eta - X\sin\eta)\,[X(X - e^{\xi}\cos\eta) + Y(Y - e^{\xi}\sin\eta)] + Y\cos\eta + X\sin\eta - e^{\xi}\sin\eta\cos\eta - XYe^{-\xi} = 0$$

oder schließlich

$$(2)\qquad (Y\cos\eta - X\sin\eta)\,[X(X - e^{\xi}\cos\eta) + Y(Y - e^{\xi}\sin\eta)] - e^{-\xi}(X - e^{\xi}\cos\eta)(Y - e^{\xi}\sin\eta) = 0.$$

Legt man den Nullpunkt des Koordinatensystems durch Parallelverschiebung des Achsenkreuzes in den Sattelpunkt $e^{\zeta} = e^{\xi}(\cos\eta + i\sin\eta)$, indem man

$$\begin{cases} X' = X - e^{\xi}\cos\eta, \\ Y' = Y - e^{\xi}\sin\eta \end{cases}$$

setzt, so erhält man die Gleichung

$$(3)\qquad (Y'\cos\eta - X'\sin\eta)\,[X'(X' + e^{\xi}\cos\eta) + Y'(Y' + e^{\xi}\sin\eta)] - e^{-\xi}X'Y' = 0.$$

Die Glieder niedrigsten Grades in X' und Y' sind vom zweiten Grad, der Sattelpunkt ist also Doppelpunkt der Kurve. Jede Gerade $Y' = \lambda X'$ durch diesen Punkt schneidet die Kurve noch in einem weiteren Punkt. Tatsächlich erhält man

$$(\lambda\cos\eta - \sin\eta)\,[X' + e^{\xi}\cos\eta + \lambda(\lambda X' + e^{\xi}\sin\eta)] - \lambda e^{-\xi} = 0$$

oder

$$X' = \frac{\lambda^2 e^{\xi}\cos\eta\sin\eta + \lambda(e^{\xi}\cos 2\eta - e^{-\xi}) - e^{\xi}\cos\eta\sin\eta}{(\sin\eta - \lambda\cos\eta)(1 + \lambda^2)},$$

somit eine rationale Parameterdarstellung der Kurve, die in den ursprünglichen Koordinaten folgendermaßen lautet:

$$(4)\qquad \begin{cases} X = e^{\xi}\cos\eta + \dfrac{\lambda^2 e^{\xi}\cos\eta\sin\eta + \lambda(e^{\xi}\cos 2\eta - e^{-\xi}) - e^{\xi}\cos\eta\sin\eta}{(\sin\eta - \lambda\cos\eta)(1 + \lambda^2)}, \\[2ex] Y = e^{\xi}\sin\eta + \dfrac{\lambda\,[\lambda^2 e^{\xi}\cos\eta\sin\eta + \lambda(e^{\xi}\cos 2\eta - e^{-\xi}) - e^{\xi}\cos\eta\sin\eta]}{(\sin\eta - \lambda\cos\eta)(1 + \lambda^2)}. \end{cases}$$

42. Eigenschaften der Kurve. Aus Gleichung (41·1) berechnet man für die Abszissen der Schnittpunkte der Kurve mit der X-Achse die Werte ± 1 und $e^{\xi}\cos\eta$. Die Y-Achse schneidet die Kurve nur in einem reellen Punkte;

seine Ordinate ist $e^{\xi} \sin \eta$. Ersetzt man in der Gleichung (41·1) $\mathfrak{Cof}\, \xi \cos \eta$ durch X, $\mathfrak{Sin}\, \xi \sin \eta$ durch Y, so werden beide Seiten Null, der Punkt z, dessen Koordinaten durch (40·3) gegeben sind, liegt also auf der Kurve.

Wir führen zur Abkürzung

$$(1) \qquad g(\lambda) = \lambda^2 e^{\xi} \cos \eta \sin \eta + \lambda (e^{\xi} \cos 2\eta - e^{-\xi}) - e^{\xi} \cos \eta \sin \eta$$

ein. Damit lauten die Gleichungen (41·4)

$$(2) \qquad \begin{cases} X = e^{\xi} \cos \eta + \dfrac{g(\lambda)}{(\sin \eta - \lambda \cos \eta)(1 + \lambda^2)}, \\ Y = e^{\xi} \sin \eta + \dfrac{\lambda\, g(\lambda)}{(\sin \eta - \lambda \cos \eta)(1 + \lambda^2)}. \end{cases}$$

Man erkennt daraus:

Die Kurve schneidet die uneigentliche Gerade im Punkte mit dem Parameter $\lambda = \operatorname{tg} \eta$, die beiden anderen Schnittpunkte sind wegen des Faktors $1 + \lambda^2$ imaginär. Sie hat daher nur eine Asymptote, die Tangente in dem genannten Punkte. Ihre Gleichung lautet

$$(3) \qquad Y \cos \eta - X \sin \eta = e^{-\xi} \cos \eta \sin \eta.$$

Setzt man nämlich (2) in (3) ein, nachdem man diese Gleichung zuerst durch T homogen gemacht, also in der Gestalt

$$(4) \qquad Y \cos \eta - X \sin \eta - T e^{-\xi} \cos \eta \sin \eta = 0$$

und (2) in der Gestalt

$$(5) \qquad \begin{cases} X = e^{\xi} \cos \eta (\sin \eta - \lambda \cos \eta)(1 + \lambda^2) + g(\lambda), \\ Y = e^{\xi} \sin \eta (\sin \eta - \lambda \cos \eta)(1 + \lambda^2) + \lambda\, g(\lambda), \\ T = (\sin \eta - \lambda \cos \eta)(1 + \lambda^2) \end{cases}$$

geschrieben hat, so erhält man aus (4), (5) und (1)

$$(\lambda \cos \eta - \sin \eta)\,[g(\lambda) + (1 + \lambda^2)\, e^{-\xi} \cos \eta \sin \eta] = 0$$

oder

$$(\lambda \cos \eta - \sin \eta)\,[\lambda^2 (e^{\xi} + e^{-\xi}) \cos \eta \sin \eta$$
$$+ \lambda (e^{\xi} \cos 2\eta - e^{-\xi}) - (e^{\xi} - e^{-\xi}) \cos \eta \sin \eta] = 0$$

oder

$$(\lambda \cos \eta - \sin \eta)^2\,[\lambda (e^{\xi} + e^{-\xi}) \sin \eta + (e^{\xi} - e^{-\xi}) \cos \eta] = 0,$$

d. h. die Gerade (3) berührt die Kurve im Punkte $\lambda = \operatorname{tg} \eta$, in dem die Kurve von der uneigentlichen Geraden $T = 0$ geschnitten wird.

Aus (41·3) ergeben sich die Tangenten im Doppelpunkt durch Nullsetzen der Glieder niedrigsten (zweiten) Grades:

$$(Y' \cos \eta - X' \sin \eta)(X' \cos \eta + Y' \sin \eta)\, e^{\xi} - X' Y' e^{-\xi} = 0$$

oder geordnet

$$-X'^2 \sin\eta\cos\eta + X'\,Y'(\cos^2\eta - \sin^2\eta - e^{-2\xi}) + Y'^2\sin\eta\cos\eta = 0$$

oder

$$X'^2 - 2X'\,Y'\,[\operatorname{ctg} 2\eta - (e^{2\xi}\sin 2\eta)^{-1}] - Y'^2 = 0.$$

Die linke Seite dieser Gleichung läßt sich in die beiden Faktoren

(6) $$X' - [\operatorname{ctg} 2\eta - (e^{2\xi}\sin 2\eta)^{-1} \pm \sqrt{D}]\,Y'$$

spalten, wobei

(7) $$D = 1 + [\operatorname{ctg} 2\eta - (e^{2\xi}\sin\eta)^{-1}]^2$$

ist. Null gesetzt, liefern sie die Gleichungen der Tangenten im Doppelpunkt (Sattelpunkt). Die Tangenten sind wegen (6) reell und verschieden, der Doppelpunkt ist ein Knotenpunkt.

Soll die Kurve in eine Gerade und einen Kegelschnitt zerfallen, so muß eine dieser beiden Tangenten die Gerade sein, d. h. die Glieder dritten Grades $(X'^2 + Y'^2)(Y'\cos\eta - X'\sin\eta)$ in Gleichung (41·3) müssen durch den betreffenden Linearfaktor teilbar sein. Da diese Faktoren reell sind, $X'^2 + Y'^2$ sich aber nicht reell spalten läßt, erhält man aus dieser Bedingung gemäß (6) die Identität

$$Y'\operatorname{ctg}\eta - X' = [\operatorname{ctg} 2\eta - (e^{2\xi}\sin 2\eta)^{-1} \pm \sqrt{D}]\,Y' - X',$$

somit

$$\operatorname{ctg}\eta = \operatorname{ctg} 2\eta - (e^{2\xi}\sin 2\eta)^{-1} \pm \sqrt{D}$$

oder

$$D = [(e^{2\xi}\sin 2\eta)^{-1} - \operatorname{ctg} 2\eta + \operatorname{ctg}\eta]^2,$$

daher nach (7)

$$1 = \operatorname{ctg}^2\eta - 2\operatorname{ctg}\eta\,[\operatorname{ctg} 2\eta - (e^{2\xi}\sin 2\eta)^{-1}]$$

oder

$$\sin^2\eta\sin 2\eta - \cos^2\eta\sin 2\eta + 2\cos\eta\sin\eta\cos 2\eta - 2e^{-2\xi}\cos\eta\sin\eta = 0$$

oder

$$\sin\eta\cos\eta = 0,$$

somit $\eta = \frac{\pi}{2}$ wegen $0 < \eta < \pi$. Die Kurve zerfällt gemäß (41·3) in die Y'-Achse und den Kreis

$$X^2 + (Y - \operatorname{Sin}\xi)^2 = \operatorname{Cos}^2\xi.$$

Der Mittelpunkt des Kreises ist zufolge (40·3) der Punkt z.

43. Gestalt der Kurve. Nach Ziffer 41 ist

$$\lambda = \frac{Y - e^{\xi} \sin \eta}{X - e^{\xi} \cos \eta}.$$

Es sind also gemäß (40·3) folgende Werte von $t = X + iY$ und λ einander zugeordnet:

$$(1) \quad \begin{cases} t = i e^{\xi} \sin \eta, & -1, & \infty, & z, & 1, & e^{\xi} \cos \eta, \\ \lambda = 0, & \dfrac{e^{\xi} \sin \eta}{e^{\xi} \cos \eta + 1}, & \operatorname{tg} \eta, & \mathfrak{Ctg}\, \xi \operatorname{tg} \eta, & \dfrac{e^{\xi} \sin \eta}{e^{\xi} \cos \eta - 1}, & \infty. \end{cases}$$

Alle diese Punkte t liegen zufolge der vorigen Ziffer auf der Kurve. Wir berechnen mit diesen Werten $g(\lambda)$ aus (42·1). Es wird

$$(2) \quad \begin{cases} g(0) = -e^{\xi} \cos \eta \sin \eta, \\ g\left(\dfrac{e^{\xi} \sin \eta}{e^{\xi} \cos \eta + 1}\right) = \dfrac{\sin \eta}{(e^{\xi} \cos \eta + 1)^2} [e^{3\xi} \sin^2 \eta \cos \eta \\ \qquad + (e^{\xi} \cos \eta + 1)(e^{2\xi} \cos 2\eta - 1) - (e^{\xi} \cos \eta + 1)^2 e^{\xi} \cos \eta] \\ \qquad = -\dfrac{e^{2\xi} + 2e^{\xi} \cos \eta + 1}{(e^{\xi} \cos \eta + 1)^2} \sin \eta = -\dfrac{2e^{\xi} (\mathfrak{Cof}\, \xi + \cos \eta) \sin \eta}{(e^{\xi} \cos \eta + 1)^2}, \\ g(\operatorname{tg} \eta) = \operatorname{tg} \eta\, [e^{\xi} \sin^2 \eta + (e^{\xi} \cos 2\eta - e^{-\xi}) - e^{\xi} \cos^2 \eta] = -e^{-\xi} \operatorname{tg} \eta, \\ g(\mathfrak{Ctg}\, \xi \operatorname{tg} \eta) = \dfrac{\operatorname{tg} \eta}{(e^{\xi} - e^{-\xi})^2} [(e^{\xi} + e^{-\xi})^2 e^{\xi} \sin^2 \eta \\ \qquad + (e^{2\xi} - e^{-2\xi})(e^{\xi} \cos 2\eta - e^{-\xi}) - (e^{\xi} - e^{-\xi})^2 e^{\xi} \cos^2 \eta] \\ \qquad = \dfrac{\operatorname{tg} \eta}{(e^{\xi} - e^{-\xi})^2} (e^{\xi} - 2e^{-\xi} \cos 2\eta + e^{-3\xi}) \\ \qquad = \dfrac{e^{-\xi} \operatorname{tg} \eta}{(e^{\xi} - e^{-\xi})^2} [(e^{\xi} + e^{-\xi})^2 \sin^2 \eta + (e^{\xi} - e^{-\xi})^2 \cos^2 \eta] \\ \qquad = e^{-\xi} \sin \eta \cos \eta\, (\mathfrak{Ctg}^2\, \xi \operatorname{tg}^2 \eta + 1), \\ g\left(\dfrac{e^{\xi} \sin \eta}{e^{\xi} \cos \eta - 1}\right) = \dfrac{\sin \eta}{(e^{\xi} \cos \eta - 1)^2} [e^{3\xi} \sin^2 \eta \cos \eta \\ \qquad + (e^{\xi} \cos \eta - 1)(e^{2\xi} \cos 2\eta - 1) - (e^{\xi} \cos \eta - 1)^2 e^{\xi} \cos \eta] \\ \qquad = \dfrac{e^{2\xi} - 2e^{\xi} \cos \eta + 1}{(e^{\xi} \cos \eta - 1)^2} \sin \eta \\ \qquad = \dfrac{2e^{\xi} (\mathfrak{Cof}\, \xi - \cos \eta) \sin \eta}{(e^{\xi} \cos \eta - 1)^2}, \\ \lim\limits_{\lambda \to \pm\infty} g(\lambda) = +\infty \quad \text{für} \quad \cos \eta \sin \eta > 0. \end{cases}$$

Wir setzen zuerst $0 < \eta < \frac{\pi}{2}$ voraus (Fall I). Es ist

$$\cos\eta < \mathfrak{Cof}\,\xi,$$

$$(\mathfrak{Cof}\,\xi - \mathfrak{Sin}\,\xi)\,e^{\xi}\cos\eta < \mathfrak{Cof}\,\xi,$$

$$(\mathfrak{Ctg}\,\xi - 1)\,e^{\xi}\cos\eta < \mathfrak{Ctg}\,\xi,$$

$$\mathfrak{Ctg}\,\xi\,(e^{\xi}\cos\eta - 1) < e^{\xi}\cos\eta,$$

$$\mathfrak{Ctg}\,\xi\,\mathrm{tg}\,\eta \lesseqgtr \frac{e^{\xi}\sin\eta}{e^{\xi}\cos\eta - 1} \quad \text{für } e^{\xi}\cos\eta \gtreqless 1.$$

Im Falle des oberen Zeichens sind also die Werte von λ in (1) nach ihrer Größe geordnet, im Falle des unteren Zeichens ist

$$\frac{e^{\xi}\sin\eta}{e^{\xi}\cos\eta - 1} < 0.$$

Den Doppelpunkt e^{ζ} der Kurve erhält man gemäß Ziffer 41 und (42·2) für $g(\lambda) = 0$. Wir bezeichnen die beiden Lösungen dieser Gleichung mit λ_1 und λ_2. Verfolgt man die Änderung des Vorzeichens von $g(\lambda)$ an Hand von (2), so sieht man, daß

$$\lambda_1 < 0 < \mathrm{tg}\,\eta < \lambda_2 < \mathfrak{Ctg}\,\xi\,\mathrm{tg}\,\eta$$

ist. Die Punkte t aus (1) werden daher auf der Kurve in folgender Reihe durchlaufen:

$$\infty,\ -1,\ i e^{\xi}\sin\eta,\ e^{\zeta},\ e^{\xi}\cos\eta,\ 1,\ z,\ e^{\bar\zeta},\ \infty,$$

wobei noch $e^{\xi}\cos\eta$ und 1 ihre Plätze tauschen können.

Es ergeben sich damit Abb. 37—39; Abb. 37 entspricht dem Fall $e^{\xi}\cos\eta > 1$, Abb. 38 dem Fall $e^{\xi}\cos\eta < 1$; die unter dem Winkel η gegen die reelle Achse geneigte Gerade ist die Asymptote der Kurve. Abb. 39 zeigt den Fall $\eta = \frac{\pi}{2}$, in welchem die Kurve gemäß Ziffer 42 in die Y-Achse und den Kreis mit dem Mittelpunkt z zerfällt.

Ist $\frac{\pi}{2} < \eta < \pi$ (Fall II), so setzen wir $\eta = \pi - \eta^*$ und $X = -X^*$; damit ergibt sich wieder die Kurvengleichung (41·2), nur ist X durch X^* und η durch η^* ersetzt. Wir brauchen also nur die Kurven des Falles I an der Y-Achse zu spiegeln, um die des Falles II zu erhalten.

44. Berechnung des Integrals I_2. Nach Ziffer 39 beginnt der Integrationsweg für I_2 im Punkte -1, umschließt den Punkt z und endigt im Punkte $+1$. Wir können ihn also nach dem CAUCHYschen Satz in die in Ziffer 41—43 untersuchte Kurve verbiegen, ohne den Wert von I_2 zu ändern, und zwar benötigen wir von der Kurve den von -1 bis $+1$ reichenden Teil L_2.

Wir führen

(1) $$e^{\tau} = \frac{2\,e^{\zeta}(z-t)}{1-t^2}$$

ein. Nach (40·5) wird L_2 auf die doppelt überdeckte, positive reelle Achse der τ-Ebene abgebildet. Zufolge (1) und (40·2) entsprechen den Werten

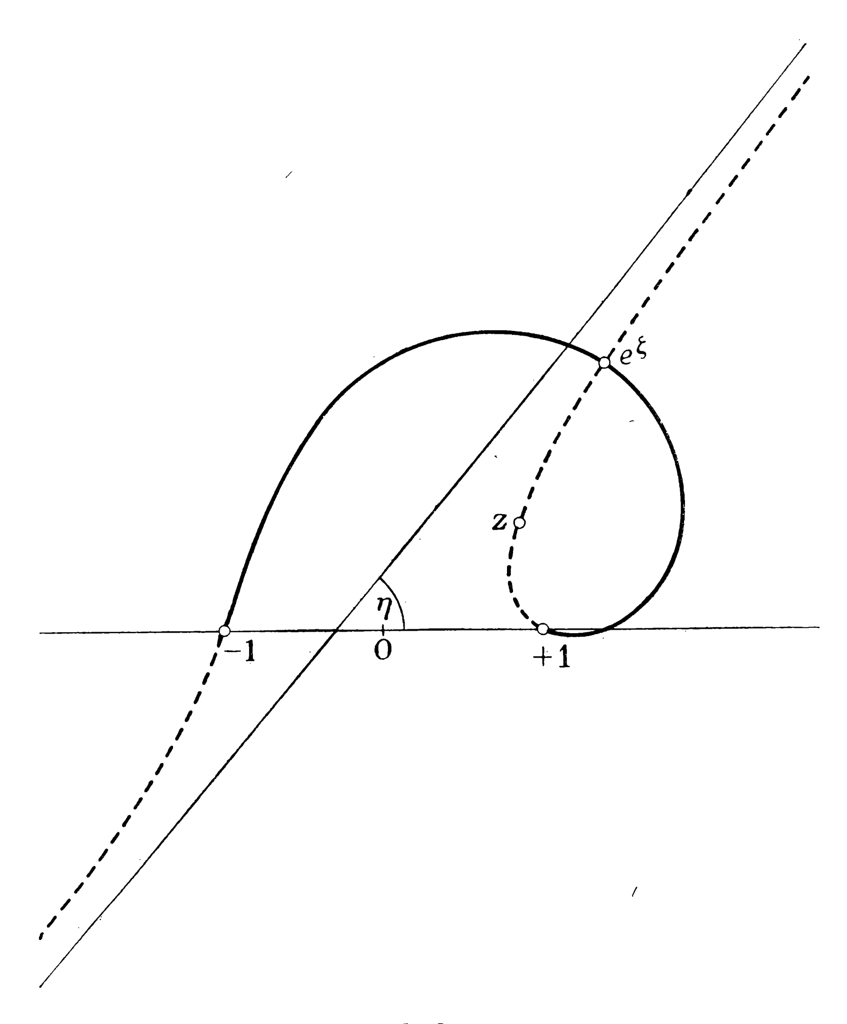


Abb. 37.

$t = \infty$, z, e^{ζ}, ± 1 die Werte $\tau = -\infty$, $-\infty$, 0, $+\infty$. Bewegt sich also t auf L_2 von -1 bis e^{ζ}, so durchläuft τ die reelle Achse von $+\infty$ bis 0; überschreitet t den Punkt e^{ζ} und läuft bis $+1$, so kehrt τ in 0 um und

wandert nach $+\infty$ zurück. Denn $\tau = 0$ ist Verzweigungspunkt, weil die Ableitung von (1) nach t und damit $\frac{d\tau}{dt}$ im Sattelpunkt, also für $\tau = 0$, nach (40·4) verschwindet.

Wir erhalten aus (1)

$$(t^2 - 1)\, e^{\tau} = 2\, e^{\zeta}\, (t - \operatorname{Cof} \zeta),$$

$$t^2 - 2\, e^{\zeta - \tau}\, t + e^{2\zeta - \tau} + e^{-\tau} - 1 = 0,$$

$$t = e^{\zeta - \tau} \pm \sqrt{e^{2\zeta - 2\tau} - e^{2\zeta - \tau} - e^{-\tau} + 1},$$

$$(2) \qquad t - e^{\zeta} = \pm (1 - e^{2\zeta - \tau})^{\frac{1}{2}} (1 - e^{-\tau})^{\frac{1}{2}} - e^{\zeta} (1 - e^{-\tau})$$

$$= \pm \left[1 - e^{2\zeta} \left(1 - \tau + \frac{\tau^2}{2} - \frac{\tau^3}{6} + \cdots\right)\right]^{\frac{1}{2}} \left(\tau - \frac{\tau^2}{2} + \frac{\tau^3}{6} - \cdots\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$- e^{\zeta} \left(\tau - \frac{\tau^2}{2} + \frac{\tau^3}{6} - \cdots\right)$$

$$= \pm (1 - e^{2\zeta})^{\frac{1}{2}} \left[1 + \frac{e^{2\zeta}}{1 - e^{2\zeta}} \left(\tau - \frac{\tau^2}{2} + \frac{\tau^3}{6} - \cdots\right)\right]^{\frac{1}{2}} \tau^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{\tau}{2} + \frac{\tau^2}{6} - \cdots\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$- e^{\zeta} \left(\tau - \frac{\tau^2}{2} + \frac{\tau^3}{6} - \cdots\right)$$

$$= \pm (1 - e^{2\zeta})^{\frac{1}{2}}\, \tau^{\frac{1}{2}} \pm \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, \tau^{n + \frac{1}{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\, \tau^n$$

für alle genügend kleinen $|\tau|$. Mit Rücksicht auf $\operatorname{arc}(e^{\zeta}) = \eta$ wollen wir $(1 - e^{2\zeta})^{\frac{1}{2}}$ positiv für $\eta = \frac{\pi}{2}$ nehmen. In diesem Fall ist L_2 der durch e^{ζ} gehende Kreisbogen von Abb. 39. Das obere Vorzeichen in (2) liefert für den Vektor $t - e^{\zeta}$ einen Winkel nahe bei Null, weil das Glied niedrigster Ordnung positiv ist; es entspricht also dem Teil der Kurve zwischen e^{ζ} und $+1$, daher das untere dem zwischen e^{ζ} und -1. Aus Stetigkeitsgründen gilt das auch für $\eta \neq \frac{\pi}{2}$.

Die Gleichung (2) liefert

$$\frac{dt}{d\tau} = \pm \frac{1}{2} (1 - e^{2\zeta})^{\frac{1}{2}}\, \tau^{-\frac{1}{2}} \pm \sum_{n=1}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2}\right) a_n\, \tau^{n - \frac{1}{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} n\, b_n\, \tau^{n-1},$$

$$z - t = z - e^{\zeta} \mp (1 - e^{2\zeta})^{\frac{1}{2}}\, \tau^{\frac{1}{2}} \mp \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, \tau^{n + \frac{1}{2}} - \sum_{n=1}^{\infty} b_n\, \tau^n,$$

$$(z - t)^{-1} = (z - e^{\zeta})^{-1} \left(1 \pm \sum_{n=0}^{\infty} c_n\, \tau^{n + \frac{1}{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} d_n\, \tau^n\right),$$

$$(3)\qquad (z-t)^{-1}\frac{dt}{d\tau} = \pm\frac{1}{2}(z-e^{\zeta})^{-1}(1-e^{2\zeta})^{\frac{1}{2}}\tau^{-\frac{1}{2}} \pm \sum_{n=0}^{\infty} a'_n \tau^{n+\frac{1}{2}} + \sum_{n=0}^{\infty} b'_n \tau^n.$$

Dabei ist $1-e^{2\zeta} = (1+e^{\zeta})(1-e^{\zeta})$ mit $|\operatorname{arc}(1\pm e^{\zeta})| < \pi$ aus Stetigkeitsgründen, weil wir $\operatorname{arc}(1\pm t) = 0$ für $-1 < t < +1$ gesetzt haben.

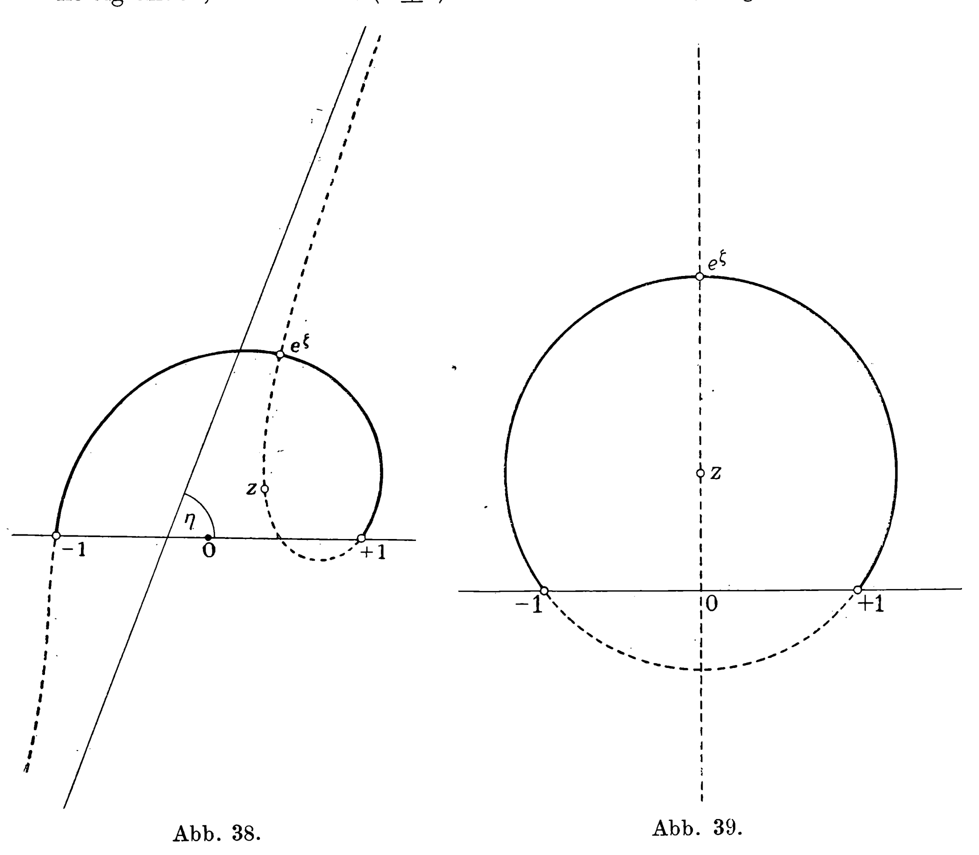


Abb. 38. Abb. 39.

Ferner ist nach (40·2)

$$z-e^{\zeta} = -\mathfrak{Sin}\,\zeta = -\mathfrak{Sin}\,\xi\cos\eta - i\,\mathfrak{Cof}\,\xi\sin\eta,$$

demnach rein imaginär für $\eta = \frac{\pi}{2}$ und hat das entgegengesetzte Zeichen von η. $\operatorname{arc}(z-t)$ geht gemäß Ziffer 39 von $\operatorname{arc}(z+1)$ bis $\operatorname{arc}(z-1)-2\pi$, wenn t den Bogen L_2 durchläuft, daher ist $\operatorname{arc}(z-e^{\zeta}) = -\frac{\pi}{2}$ für $\eta = \frac{\pi}{2}$, somit $z-e^{\zeta} = \frac{1}{2}e^{-\zeta}(1-e^{2\zeta})$, wobei sich die Winkel beider Seiten

dieser Gleichung nicht mehr um Vielfache von 2π unterscheiden, weil $\operatorname{arc}(e^{-\zeta}) = -\frac{\pi}{2}$ und $\operatorname{arc}(1 - e^{2\zeta}) = 0$ für $\eta = \frac{\pi}{2}$ ist; infolgedessen ist in demselben Sinne

(4) $$\frac{1}{2}(z - e^{\zeta})^{-1}(1 - e^{2\zeta})^{\frac{1}{2}} = e^{\zeta}(1 + e^{\zeta})^{-\frac{1}{2}}(1 - e^{\zeta})^{-\frac{1}{2}}.$$

Die Reihen in (2) und (3) konvergieren in einem Kreis um $\tau = 0$, der durch den nächsten singulären Punkt der betreffenden Funktion geht. Dieser ist durch $\frac{dt}{d\tau} = 0$ oder ∞, d. h. gemäß (40·4) durch $t = e^{\pm\zeta}$ gegeben. Denn die Werte $t = \pm 1$ oder z kommen nicht in Frage, weil sie auf $\tau = \pm\infty$ führen. Die $e^{\pm\zeta}$ entsprechenden Werte sind $\tau_0 = 2k\pi i$, $2\zeta + 2k\pi i$ (k ganz) nach (1), $\tau_0 = 0$ natürlich ausgenommen. Schließen wir die singulären Stellen durch genügend kleine Kreise aus, so ist nach (2) und (3)

(5) $$\left|(z - t)^{-1}\frac{dt}{d\tau}\right| < A e^{K|\tau|},$$

wobei die positiven Zahlen A und K nur von z, aber nicht von τ abhängen.

Nun berechnen wir I_2. Wir setzen $|\nu|$ genügend groß und $|\operatorname{arc}\nu| \leqq \frac{\pi}{2} - \delta$ $(\delta > 0)$ voraus. Nach (39·1) und (1) ist der Integrand von I_2

$$(2e^{\zeta})^{\nu} e^{-\nu\tau}(z - t)^{-1},$$

infolgedessen

(6) $$I_2 = 2^{\nu} e^{\nu\zeta}\left\{\int_{\infty}^{0} e^{-\nu\tau}\left[(z - t)^{-1}\frac{dt}{d\tau}\right]_{\text{vor}} d\tau + \int_{0}^{\infty} e^{-\nu\tau}\left[(z - t)^{-1}\frac{dt}{d\tau}\right]_{\text{nach}} d\tau\right\};$$

„vor“ und „nach“ bedeuten die Werte der betreffenden Funktion vor und nach der Umkehr von τ im Nullpunkt. Für $(z - t)^{-1}\frac{dt}{d\tau}$ setzen wir nach (3) und (4)

$$\pm e^{\zeta}(1 - e^{2\zeta})^{-\frac{1}{2}}\tau^{-\frac{1}{2}} \pm \sum_{n=0}^{k-2} a_n' \tau^{n+\frac{1}{2}} + \sum_{n=0}^{k-2} b_n' \tau^n + R_{\pm},$$

wobei die oberen Zeichen die Werte nach, die unteren die Werte vor der Umkehr liefern. Damit wird aus (6)

(7) $$I_2 = 2^{\nu} e^{\nu\zeta}\left[2e^{\zeta}(1 - e^{2\zeta})^{-\frac{1}{2}}\int_0^{\infty} e^{-\nu\tau}\tau^{-\frac{1}{2}}d\tau\right.$$
$$\left. + 2\sum_{n=0}^{k-2} a_n' \int_0^{\infty} e^{-\nu\tau}\tau^{n+\frac{1}{2}}d\tau + \int_0^{\infty} e^{-\nu\tau}(R_+ - R_-)\,d\tau\right].$$

Das letzte Integral zerlegen wir in $\int\limits_0^\infty = \int\limits_0^r + \int\limits_r^\infty$, wobei die positive Zahl r kleiner als der Konvergenzhalbmesser der Reihen in (3) sein soll. Damit erhält man nach (3) und (5) mit passendem, positivem, von n und τ unabhängigem B folgende Schranken:

$$(8)\qquad \left|\int\limits_0^r e^{-\nu\tau}(R_+ - R_-)\,d\tau\right| < 2B\int\limits_0^r e^{-\Re(\nu)\tau}\tau^{k-\frac{1}{2}}\,d\tau < 2B\int\limits_0^\infty e^{-\Re(\nu)\tau}\tau^{k-\frac{1}{2}}\,d\tau$$

und

$$\left|\int\limits_r^\infty e^{-\nu\tau}(R_+ - R_-)\,d\tau\right| < 2B\int\limits_r^\infty e^{-[\Re(\nu)-K]\tau}\,d\tau = 2B\,\frac{e^{-[\Re(\nu)-K]r}}{\Re(\nu)-K}\,.$$

Wegen der Voraussetzung über $|\operatorname{arc}\nu|$ können wir nach Ziffer 2 berechnen:

$$(9)\qquad \int\limits_0^\infty e^{-\nu\tau}\tau^{n+\frac{1}{2}}\,d\tau = \nu^{-n-\frac{3}{2}}\,\Gamma\!\left(n+\frac{3}{2}\right).$$

Die erste der Schranken (8) lautet danach $2B\Gamma\!\left(k+\frac{1}{2}\right)[\Re(\nu)]^{-k-\frac{1}{2}}$ man kann also beide Schranken (8) für alle genügend großen $|\nu|$ in

$$2C|\nu|^{-k-\frac{1}{2}}$$

zusammenfassen, wobei die positive Zahl C von ν nicht abhängt. Sonach erhält man schließlich aus (7) mit (9) und (4·5)

$$(10)\qquad I_2 = 2^{1+\nu}e^{\nu\zeta}\left[e^{\zeta}(1-e^{2\zeta})^{-\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{\pi}{\nu}} + \sum_{n=0}^{k-2} a_n'\,\Gamma\!\left(n+\frac{3}{2}\right)\nu^{-n-\frac{3}{2}} + R'\right],$$

wobei $|R'| < C|\nu|^{-k-\frac{1}{2}}$ ist. Dieses Verfahren stammt von Watson[1]).

45. Analytische Fortsetzung von I_2. Unter gewissen Bedingungen für ν können wir die Integrale in (44·6), ohne ihren Wert zu ändern, auch längs eines Halbstrahles G von 0 nach ∞ erstrecken, der mit der positiven reellen Achse einen bestimmten Winkel α einschließt. Diesem Halbstrahl entspricht in der t-Ebene eine Kurve, die sich ähnlich einer logarithmischen Spirale unendlich oft um die Punkte ± 1 windet. Im Innern und auf den Schenkeln dieses Winkels α sollen keine singulären Punkte τ_0 liegen (ausgenommen natürlich der Scheitel 0 des Winkels). Es sei

$$(1)\qquad \nu = |\nu|\,e^{i\beta}.$$

Nun überlegen wir wie in Ziffer 2: Das über den geschlossenen Weg in Abb. 6 erstreckte Integral ist nach dem Cauchyschen Satz Null. Der

[1]) G. N. Watson, Proc. London Math. Soc., Serie 2, 17 (1918) 133.

von dem kleinen Kreisbogen um den Nullpunkt herrührende Bestandteil strebt nach (44·3) mit dem Halbmesser dieses Bogens gegen Null. Auf dem großen Kreisbogen gilt die Abschätzung (44·5), daher ist dort der Betrag des Integrals kleiner als

$$A R \left| \int_0^{\alpha} e^{-\Re(\nu\tau)+K|\tau|} d\varphi \right| = A R \left| \int_0^{\alpha} e^{-[|\nu|\cos(\beta+\varphi)-K]R} d\varphi \right|$$
$$< A\,|\alpha|\, R e^{-(|\nu|\sin\delta-K)R},$$

sobald das von β und $\alpha+\beta$ begrenzte Intervall des Winkels $\beta+\varphi$ im Intervall $-\frac{\pi}{2}+\delta \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2}-\delta$ liegt. Das über diesen Bogen erstreckte Integral strebt dann für $R \to +\infty$ gegen Null. Zusammenfassend können wir sagen: Ohne den Wert von $\int_0^{\infty} e^{-\nu\tau}(z-t)^{-1}\frac{dt}{d\tau}d\tau$ zu ändern, kann man den Integrationsweg (die positive reelle Achse) um einen Winkel α drehen, wenn dabei kein singulärer Punkt τ_0 überstrichen wird und das von β und $\alpha+\beta$ begrenzte Intervall des Winkels φ im Intervall

$$-\frac{\pi}{2}+\delta \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2}-\delta$$

liegt.

$I_\alpha = \int_G e^{-\nu\tau}(z-t)^{-1}\frac{dt}{d\tau}d\tau$ konvergiert absolut und gleichmäßig für $|\nu| \geqq N$ (N genügend groß), $|\alpha+\beta| \leqq \frac{\pi}{2}-\delta$ und alle z des in Ziffer 38 angegebenen Bereiches. Zum Beweise bezeichnen wir den Integranden kurz mit $f(\tau)$. Dann haben wir für die kritische Stelle $\tau = 0$ nach (44·3) mit $\varepsilon > 0$ und festem, positivem M

$$\left| \int_0^{\varepsilon} f(|\tau|e^{i\alpha})\,d|\tau| \right| < M \int_0^{\varepsilon} |\tau|^{-\frac{1}{2}} d|\tau| = 2M\varepsilon^{\frac{1}{2}} \to 0$$

für $\varepsilon \to 0$ unabhängig von ν und z, für die kritische Stelle ∞ ähnlich wie früher mit $T > 0$

$$\left| \int_T^{\infty} f(|\tau|e^{i\alpha})\,d|\tau| \right| < A \int_T^{\infty} e^{-|\nu||\tau|\cos(\alpha+\beta)+K|\tau|} d|\tau|$$
$$< A \int_T^{\infty} e^{-(N\sin\delta-K)|\tau|} d|\tau| = \frac{A\,e^{-(N\sin\delta-K)T}}{N\sin\delta-K} \to 0$$

für $T \to +\infty$, ebenfalls unabhängig von ν und z. Das Integral ist also in den angegebenen Bereichen eine analytische Funktion von ν und z.

I_0 ($\alpha = 0$) ist demnach analytisch in B_0: $-\frac{\pi}{2}+\delta \leqq \beta \leqq \frac{\pi}{2}-\delta$,

$$I_\alpha \text{ in } B_\alpha:\ -\frac{\pi}{2}-\alpha+\delta \leqq \beta \leqq \frac{\pi}{2}-\alpha-\delta.$$

Im Durchschnitt von B_0 und B_α ist $I_0 = I_\alpha$, somit ist I_α die analytische Fortsetzung von I_0.

Führt man die Rechnungen, die zu den Formeln (7) bis (10) der vorigen Ziffer gehören, für I_α statt I_0 durch, so bleiben (7) und (9) erhalten; dagegen ergibt sich für die Schranken (8)

$$2B\int_0^r e^{-|\nu|\cos(\alpha+\beta)|\tau|}|\tau|^{k-\frac{1}{2}}d|\tau| < 2B\int_0^\infty e^{-|\nu|\cos(\alpha+\beta)|\tau|}|\tau|^{k-\frac{1}{2}}d|\tau|$$
$$= 2B\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)[|\nu|\cos(\alpha+\beta)]^{-k-\frac{1}{2}}$$

und

$$2B\int_r^\infty e^{-[|\nu|\cos(\alpha+\beta)-K]|\tau|}d|\tau| = \frac{2Be^{-[|\nu|\cos(\alpha+\beta)-K]r}}{|\nu|\cos(\alpha+\beta)-K}$$

und damit die Gültigkeit von (10) für alle hinreichend großen $|\nu|$ mit $|\alpha+\beta| \leqq \frac{\pi}{2} - \delta$.

Danach kann man den ursprünglichen Gültigkeitsbereich von (44·10), nämlich $|\operatorname{arc}\nu| = |\beta| \leqq \frac{\pi}{2} - \delta$ wegen $\alpha = 0$, in folgender Weise erweitern: Die singulären Punkte τ_0 liegen gemäß Ziffer 44 auf der imaginären Achse, jeweils im Abstand 2π voneinander, und ebenso auf einer im Abstand 2ξ zu dieser Achse gezogenen *parallelen* Geraden (Abb. 40). Setzen wir also $\alpha = -\gamma_2 + \delta$ bzw. $\alpha = \gamma_1 - \delta$, so erweitern wir dadurch den Gültigkeitsbereich von (44·10) auf

$$-\frac{\pi}{2} - \gamma_2 + 2\delta \leqq \beta \leqq \frac{\pi}{2} + \gamma_1 - 2\delta.$$

Abb. 40.

46. Berechnung des Integrals I_1. In diesem Falle nehmen wir den anderen Sattelpunkt $e^{-\zeta}$. Wir haben also in den früheren Überlegungen ζ durch $-\zeta$ gemäß Ziffer 41 zu ersetzen, sonst bleibt alles beim alten. Für die Wertereihe (43·1) ergibt sich jetzt

$$(1)\begin{cases} t = \infty, & -1, & -ie^{-\xi}\sin\eta, & 1, & z, & e^{-\xi}\cos\eta \\ \lambda = -\operatorname{tg}\eta, & -\dfrac{e^{-\xi}\sin\eta}{1+e^{-\xi}\cos\eta}, & 0, & \dfrac{e^{-\xi}\sin\eta}{1-e^{-\xi}\cos\eta}, & \mathfrak{Ctg}\,\xi\operatorname{tg}\eta, & \infty. \end{cases}$$

Für $0 < \eta < \frac{\pi}{2}$ sind die Werte von λ der Größe nach geordnet, wie man leicht erkennt, wenn man wie in Ziffer 43 noch folgendes überlegt: Es ist

$$\begin{gathered}\cos\eta < \mathfrak{Cof}\,\xi,\\ 2\cos\eta < e^{\xi} + e^{-\xi},\\ (1 - e^{-2\xi})\cos\eta < e^{\xi} + e^{-\xi} - \cos\eta - e^{-2\xi}\cos\eta,\\ e^{-\xi}\,\mathfrak{Sin}\,\xi\cos\eta < (1 - e^{-\xi}\cos\eta)\,\mathfrak{Cof}\,\xi,\\ e^{-\xi}\cos\eta < \mathfrak{Ctg}\,\xi\,(1 - e^{-\xi}\cos\eta),\\ \frac{e^{-\xi}\sin\eta}{1 - e^{-\xi}\cos\eta} < \mathfrak{Ctg}\,\xi\,\operatorname{tg}\eta.\end{gathered}$$

Statt $g(\lambda)$ bekommt man jetzt nach (42·1)

(2) $$h(\lambda) = -\lambda^2 e^{-\xi}\cos\eta\sin\eta + \lambda(e^{-\xi}\cos 2\eta - e^{\xi}) + e^{-\xi}\cos\eta\sin\eta.$$

(43·2) liefert mit (1) und (2)

(3) $$\begin{cases} h(-\operatorname{tg}\eta) = e^{\xi}\operatorname{tg}\eta,\\ h\left(-\dfrac{e^{-\xi}\sin\eta}{1 + e^{-\xi}\cos\eta}\right) = \dfrac{2e^{-\xi}(\mathfrak{Cof}\,\xi + \cos\eta)\sin\eta}{(1 + e^{-\xi}\cos\eta)^2},\\ h(0) = e^{-\xi}\cos\eta\sin\eta,\\ h\left(\dfrac{e^{-\xi}\sin\eta}{1 - e^{-\xi}\cos\eta}\right) = -\dfrac{2e^{-\xi}(\mathfrak{Cof}\,\xi - \cos\eta)\sin\eta}{(1 - e^{-\xi}\cos\eta)^2},\\ h(\mathfrak{Ctg}\,\xi\operatorname{tg}\eta) = -e^{\xi}\sin\eta\cos\eta\,(\mathfrak{Ctg}^2\,\xi\operatorname{tg}^2\eta + 1),\\ \lim\limits_{\lambda\to\pm\infty} h(\lambda) = -\infty. \end{cases}$$

Verfolgt man wieder die Änderung des Vorzeichens von $h(\lambda)$ an Hand von (3), so ergibt sich für die Parameterwerte λ_1 und λ_2 des Doppelpunktes

$$\lambda_1 < -\operatorname{tg}\eta \quad \text{und} \quad 0 < \lambda_2 < \frac{e^{-\xi}\sin\eta}{1 - e^{-\xi}\cos\eta},$$

also folgende Reihe der Kurvenpunkte t (Abb. 41):

$$\infty,\ -1,\ -ie^{-\xi}\sin\eta,\ e^{-\zeta},\ 1,\ z,\ e^{-\xi\cos\eta},\ e^{-\zeta},\ \infty.$$

Ist $\frac{\pi}{2} < \eta < \pi$, so haben wir wieder die Kurve an der imaginären Achse zu spiegeln wie in Ziffer 43. Für alle in Betracht kommenden Werte $0 < \eta < \pi$ liegt demnach der Bogen L_1 von -1 bis $+1$ in der unteren Halbebene und kann somit als Integrationsweg für I_1 nach Ziffer 39 und 40 gewählt werden.

Statt (44·1) hat man jetzt

$$e^{\tau} = \frac{2e^{-\zeta}(z - t)}{1 - t^2}$$

und statt (44·10) ergibt sich

$$(4)\quad I_1 = 2^{1+\nu} e^{-\nu\zeta}\left[e^{-\zeta}(1-e^{-2\zeta})^{-\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{\pi}{\nu}} + \sum_{n=0}^{k-2} a_n'' \Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)\nu^{-n-\frac{3}{2}} + R''\right]$$

mit $|R''| < C|\nu|^{-k-\frac{1}{2}}$ für alle genügend großen $|\nu|$ mit $|\operatorname{arc}\nu| \leqq \frac{\pi}{2} - \delta$.

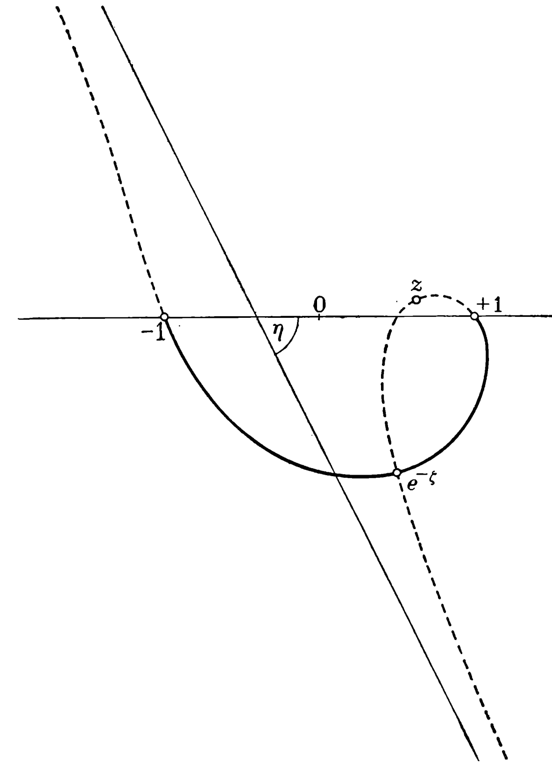


Abb. 41.

Die singulären Punkte $2k\pi i - 2\zeta$ liegen wegen $\xi > 0$ in der linken Halbebene; wir haben also $\gamma_1 = \gamma_2 = \frac{\pi}{2}$ in Ziffer 45, d. h. der Gültigkeitsbereich von (4) kann bis auf $|\operatorname{arc}\nu| \leqq \pi - 2\delta$ erweitert werden.

47. Asymptotische Darstellung von $\mathfrak{P}_\nu(z)$ bei komplexem Zeiger. Für $\mathfrak{P}_\nu(z)$ erhalten wir aus (39·2), (44·10) und (46·4) die asymptotische Darstellung

$$(1)\quad \mathfrak{P}_\nu(z) = \left\{\frac{1}{i\sqrt{\pi\nu}}\left[e^{(\nu+1)\zeta}(1-e^{2\zeta})^{-\frac{1}{2}} - e^{-(\nu+1)\zeta}(1-e^{-2\zeta})^{-\frac{1}{2}}\right] + \sum_{n=0}^{k-2} a_n''' \nu^{-n-\frac{3}{2}}\right\}(1+R_k)$$

mit $|R_k| < \frac{C}{|\nu|}$. (1) ist die Verallgemeinerung von (37·2) auf komplexe Veränderliche und Zeiger.

Wegen $|\operatorname{arc}(1 \pm e^{\zeta})| < \pi$ und $|\operatorname{arc}(1 \pm e^{-\zeta})| < \pi$ ist nach Abb 42

$$1 - e^{\zeta} = e^{\zeta}(1 - e^{-\zeta})\, e^{-i\pi},$$
$$1 + e^{\zeta} = e^{\zeta}(1 + e^{-\zeta}),$$
$$1 - e^{2\zeta} = e^{2\zeta}(1 - e^{-2\zeta})\, e^{-i\pi},$$

somit, wenn wir gleich beim ersten Glied abbrechen, die Summe also ganz auslassen,

$$\mathfrak{P}_\nu(z) = \frac{(1 - e^{-2\zeta})^{-\frac{1}{2}}}{i\sqrt{\pi\nu}}\,[i e^{\nu\zeta} - e^{-(\nu+1)\zeta}]\,(1 + R)$$
$$= \frac{e^{-\frac{\zeta}{2}}}{\sqrt{\pi\nu}}\;\frac{e^{\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\zeta} + i e^{-\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\zeta}}{(1 - e^{-2\zeta})^{\frac{1}{2}}}\,(1 + R).$$

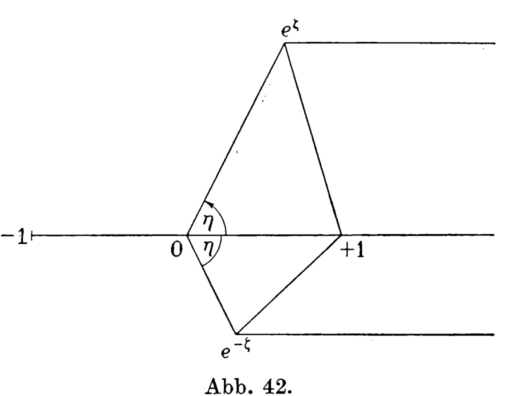


Abb. 42.

z möge sich jetzt auf der oberen Halbebene unbegrenzt einem auf der reellen Achse zwischen -1 und $+1$ gelegenen Punkte nähern; wir haben also $\xi \to 0$ und $0 < \eta < \pi$ nach (40·3), $z \to \cos\eta$, $\zeta \to i\eta$, somit

$$(2) \qquad P_\nu(\cos\eta) = \frac{e^{-\frac{i\eta}{2}}}{\sqrt{\pi\nu}}\;\frac{e^{i\eta\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} + i e^{-i\eta\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}}{(1 - e^{-2i\eta})^{\frac{1}{2}}}\,(1 + R)$$
$$= \frac{e^{i\left[\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\eta-\frac{\pi}{4}\right]} + e^{-i\left[\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\eta-\frac{\pi}{4}\right]}}{\sqrt{2\pi\nu\sin\eta}}\,(1 + R)$$
$$= \sqrt{\frac{2}{\nu\pi\sin\eta}}\cos\left[\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\eta - \frac{\pi}{4}\right](1 + R)$$
$$= \sqrt{\frac{2}{\nu\pi\sin\eta}}\sin\left[\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\eta + \frac{\pi}{4}\right](1 + R).$$

Damit ist die Formel (37·7) auf komplexe Zeiger erweitert. (2) gilt mit $|R| < \frac{C}{|\nu|}$, wobei C von ν nicht abhängt, für alle genügend großen $|\nu|$ und $|\operatorname{arc} \nu| \leqq \pi - \delta$ (δ positiv, beliebig klein). Sollte nämlich $\operatorname{arc} \nu$ außerhalb des für I_2 erhaltenen Bereiches

$$-\frac{\pi}{2} - \gamma_2 + \delta \leqq \operatorname{arc} \nu \leqq \frac{\pi}{2} + \gamma_1 - \delta$$

liegen, so liegt bestimmt $\operatorname{arc}(-\nu - 1)$ in ihm, weil der Winkelraum dieses Bereiches größer als π ist. Damit ist nach (17·5) die Behauptung bewiesen. Diese Erweiterung der Gültigkeit der asymptotischen Darstellung für $P_\nu(z)$ auf komplexe Zeiger stammt von WATSON[1]).

§ 5. Additionstheorem.

48. Eine linear gebrochene Substitution. Um auch das Additionstheorem der Kugelfunktionen auf komplexe Zeiger zu verallgemeinern, brauchen wir eine neue Integraldarstellung. Wir gehen zu diesem Zwecke von Formel (17·4) aus und setzen im folgenden $\mu = m$ als ganze Zahl voraus. Die genannte Formel lautet

(1) $$\mathfrak{P}_\nu^m(z) = \frac{1}{2^{1+\nu} \pi i} \frac{\Gamma(\nu + m + 1)}{\Gamma(\nu + 1)} (z^2 - 1)^{\frac{m}{2}} \int_{C_1} (t^2 - 1)^\nu (t - z)^{-\nu - m - 1} dt.$$

Der Integrationsweg C_1 umschlingt die Punkte 1 und z im positiven Sinn und schließt -1 aus.

Wir bilden nun die t-Ebene durch eine linear gebrochene Substitution

(2) $$u = \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta} \text{ mit } \alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

umkehrbar eindeutig auf die u-Ebene ab. Dadurch wird aus $\frac{t^2 - 1}{2(t - z)}$ der Quotient $\frac{p(u)}{q(u)}$ zweier Polynome zweiten Grades in u. σ_1 und σ_2 seien die Nullstellen von $p(u)$, τ_1 und τ_2 die von $q(u)$.

Wir führen jetzt homogene Veränderliche ein, d. h. wir setzen

(3) $$t = \frac{x_1}{x_2}, \quad u = \frac{y_1}{y_2}.$$

An Stelle von (2) können wir schreiben

(4) $$\begin{cases} y_1 = \alpha x_1 + \beta x_2 \\ y_2 = \gamma x_1 + \delta x_2 \end{cases} \quad \text{mit } \alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

[1]) G. N. WATSON, Cambridge Phil. Transactions 22 (1918) 277—308.

oder

$$\begin{cases} x_1 = \delta y_1 - \beta y_2 \\ x_2 = -\gamma y_1 + \alpha y_2; \end{cases}$$

ferner ist

$$\frac{t^2-1}{2(t-z)} = \frac{x_1^2 - x_2^2}{2x_2(x_1 - z x_2)}.$$

Drücken wir hierin x_1 und x_2 durch y_1 und y_2 aus, so erhalten wir

$$(5)\qquad \begin{cases} x_1^2 - x_2^2 = a y_1^2 + 2b y_1 y_2 + c y_2^2, \\ 2x_2(x_1 - z x_2) = a' y_1^2 + 2b' y_1 y_2 + c' y_2^2 \end{cases}$$

mit

$$\begin{cases} a = \delta^2 - \gamma^2, & a' = -2\gamma(\delta + \gamma z), \\ b = \alpha\gamma - \beta\delta, & b' = \alpha\delta + \beta\gamma + 2\alpha\gamma z, \\ c = \beta^2 - \alpha^2, & c' = -2\alpha(\beta + \alpha z). \end{cases}$$

Dabei können wir annehmen

$$(6)\qquad \begin{cases} p(u) = a u^2 + 2 b u + c, \\ q(u) = a' u^2 + 2 b' u + c'. \end{cases}$$

Da sich die Diskriminanten und die Simultaninvariante $ac' + ca' - 2bb'$ der beiden quadratischen Formen (5) bei linearen homogenen Substitutionen mit dem Quadrat der Substitutionsdeterminante $\alpha\delta - \beta\gamma$ multiplizieren, im vorliegenden Fall wegen (4) also ungeändert bleiben, erhält man

$$(7)\qquad \begin{aligned} b^2 - ac &= 1, \\ b'^2 - a'c' &= 1, \\ ac' + ca' - 2bb' &= -2z. \end{aligned}$$

Wir können demgemäß schreiben

$$(8)\qquad \begin{cases} a = \sqrt{b^2-1}\, e^{-v}, \\ c = \sqrt{b^2-1}\, e^{v}, \end{cases} \qquad \begin{cases} a' = -\sqrt{b'^2-1}\, e^{-v'}, \\ c' = -\sqrt{b'^2-1}\, e^{v'}, \end{cases}$$

wobei die Quadratwurzeln $\sqrt{b \pm 1}$ und $\sqrt{b' \pm 1}$ für $b, b' > 1$ positiv sein sollen. Mit (7), (8) und (5) ergibt sich für die Nullstellen von $p(u)$ und $q(u)$:

$$(9)\qquad \begin{cases} \sigma_1 = \dfrac{-b+1}{a} = -\sqrt{\dfrac{b-1}{b+1}}\, e^{v} = \dfrac{\alpha+\beta}{\gamma+\delta}, \\ \sigma_2 = \dfrac{-b-1}{a} = -\sqrt{\dfrac{b+1}{b-1}}\, e^{v} = \dfrac{\alpha-\beta}{\gamma-\delta}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tau_1 = \dfrac{-b'+1}{a'} = \sqrt{\dfrac{b'-1}{b'+1}}\, e^{v'} = \dfrac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}, \\ \tau_2 = \dfrac{-b'-1}{a'} = \sqrt{\dfrac{b'+1}{b'-1}}\, e^{v'} = \dfrac{\alpha}{\gamma}, \end{cases}$$

ferner

$$z = bb' + \sqrt{b^2-1}\,\sqrt{b'^2-1}\,\mathfrak{Cof}\,(v-v')\,. \tag{10}$$

Die Nullstellen von $p(u)$ sind nach (3) und (5) in den Koordinaten x_1, x_2 durch die Verhältnisse $1:(\pm 1)$, die von $q(u)$ durch $z:1$ und $1:0$ gegeben. Diese Werte liefern mit Hilfe von (9) und (3) folgende Wertezuordnung:

$$\begin{aligned} t &= +1, \quad -1, \quad z, \quad \infty, \\ u &= \sigma_1, \quad \sigma_2, \quad \tau_1, \quad \tau_2. \end{aligned} \tag{11}$$

Da sich bei einer linear gebrochenen Substitution das Doppelverhältnis von vier Punkten nicht ändert, ergibt sich nach dieser Zuordnung (11) die Substitution (2) z. B. aus der Gleichung

$$\frac{t-z}{-1-z} = \frac{(u-\tau_1)(\sigma_2-\tau_2)}{(\sigma_2-\tau_1)(u-\tau_2)}\,. \tag{12}$$

Führen wir jetzt

$$v = \frac{(\sigma_2-\tau_2)(u-\tau_1)}{(\sigma_2-\tau_1)(u-\tau_2)} \tag{13}$$

ein, so haben wir dadurch die u-Ebene umkehrbar eindeutig auf die v-Ebene abgebildet. Die Beziehung zwischen der t-Ebene und v-Ebene ist nach (12) und (13) durch

$$v = \frac{z-t}{z+1} \quad \text{und} \quad t = z - (z+1)\,v \tag{14}$$

gegeben.

49. Integraldarstellung von $\mathfrak{P}_\nu^m(z)$ und $\mathfrak{Q}_\nu^m(z)$ bei ganzzahligem m. Für (48·1) ergibt sich mit Hilfe der Substitutionen der vorigen Ziffer, insbesondere von (48·14)

$$\mathfrak{P}_\nu^m(z) = \frac{(-1)^m}{2\pi i}\,\frac{\Gamma(\nu+m+1)}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{\frac{m}{2}} \int\limits_{L_1} \left[\frac{p(u)}{q(u)}\right]^\nu \frac{dv}{v^{m+1}}\,, \tag{1}$$

wobei L_1 die dem Weg $\overline{C}_1$ entsprechende Kurve in der v-Ebene bedeutet. Das Bild von $\overline{C}_1$ in der u-Ebene wollen wir mit $\overline{L}_1$ bezeichnen. Für u haben wir uns in (1) aus (48·13) v eingeführt zu denken.

Nach (22·5) und (4·4) ist wegen des ganzzahligen m

$$\frac{\mathfrak{P}_\nu^{-m}(z)}{\mathfrak{P}_\nu^m(z)} = \frac{\Gamma(\nu-m+1)}{\Gamma(\nu+m+1)} = \frac{\Gamma(-\nu-m)}{\Gamma(m-\nu)}\,, \tag{2}$$

somit nach (1), (4·4) und (2)

$$\begin{aligned} \Gamma(-\nu-m)\,\mathfrak{P}_\nu^m(z) &= \Gamma(-\nu)\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{\frac{m}{2}} \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1}\left[\frac{p(u)}{q(u)}\right]^\nu \frac{dv}{v^{m+1}} \\ &= \Gamma(m-\nu)\,\mathfrak{P}_\nu^{-m}(z)\,. \end{aligned} \tag{3}$$

Aus Formel (19·3) erhalten wir ebenso für ganzzahlige m

$$(4)\quad \mathfrak{Q}_\nu^m(z) = \frac{e^{-i\pi(\nu+1)}}{2^{2+\nu}\, i \sin \pi\nu} \frac{\Gamma(\nu+m+1)}{\Gamma(\nu+1)} (z^2-1)^{\frac{m}{2}} \int\limits_{C_2} (t^2-1)^\nu (t-z)^{-\nu-m-1}\, dt$$

$$= \frac{e^{-i\pi(\nu+1)}}{4i \sin \pi\nu} \frac{\Gamma(-\nu)}{\Gamma(-\nu-m)} \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{\frac{m}{2}} \int\limits_{L_2} \left[\frac{p(u)}{q(u)}\right]^\nu \frac{dv}{v^{m+1}};$$

dabei umkreist C_2 den Punkt -1 im positiven und dann den Punkt $+1$ im negativen Sinne, z bleibt außerhalb C_2 liegen. Die Kurve C_2 liegt demnach so, daß sie die Verbindungsgerade von 1 und z auf der Strecke $(1, z)$ und nicht auf dem Teil (z, ∞) trifft. L_2 ist das Bild von C_2 in der v-Ebene, L_2 das in der u-Ebene. Der Geraden durch die Punkte 1 und z entspricht in der u-Ebene der durch σ_1, τ_1 und τ_2 gehende Kreis; L_2 trifft den Kreisbogen $\sigma_1\tau_1$, aber nicht den Kreisbogen $\tau_1\tau_2$. Wie früher bei $\mathfrak{P}_\nu^m(z)$ erhält man aus (4) mit Rücksicht auf (19·6)

$$(5)\quad \Gamma(-\nu-m)\, \mathfrak{Q}_\nu^m(z) = \frac{e^{-i\pi(\nu+1)}}{4i \sin \pi\nu} \Gamma(-\nu) \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{\frac{m}{2}} \int\limits_{L_2} \left[\frac{p(u)}{q(u)}\right]^\nu \frac{dv}{v^{m+1}}$$

$$= \Gamma(m-\nu)\, \mathfrak{Q}_\nu^{-m}(z).$$

Die Bedeutung dieser Substitution für die Integrale in (1) und (4) ist folgende: Denken wir uns v nach (48·13) durch u ausgedrückt, so haben wir in den Integralen statt t durch eine linear gebrochene Substitution eine Veränderliche u derart eingeführt, daß an Stelle von $\frac{t^2-1}{2(t-z)}$ in den ursprünglichen Integralen nun der Quotient $\frac{p(u)}{q(u)}$ zweier Polynome zweiten Grades tritt, deren Koeffizienten nur den Bedingungen (48·7) genügen und sonst willkürlich sind.

Daß diese Behauptung richtig ist, erkennt man so: Die Koeffizienten a, b, c, a', b', c' seien irgendwie vorgeschrieben, aber so, daß die Bedingungen (48·7) erfüllt und die aus (48·9) berechneten Werte von $\sigma_1, \sigma_2, \tau_1, \tau_2$ verschieden sind. Wir ordnen dreien dieser Werte die ihnen gemäß (48·11) entsprechenden Werte von t zu. Dann gibt es genau eine linear gebrochene Substitution (48·2), die das leistet; $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sind bis auf den gemeinsamen Faktor ± 1 bestimmt. Weil das Doppelverhältnis von vier Punkten durch die Substitution nicht geändert wird und der vierte durch das Doppelverhältnis und die drei übrigen eindeutig bestimmt ist, geht auch der vierte der drei Punkte (48·11) der u-Ebene in den ihm nach (48·11) entsprechenden vierten der t-Ebene über; denn die vier Punkte der t-Ebene und u-Ebene (48·11) haben gemäß (48·9) dasselbe Doppelverhältnis. $\frac{p(u)}{q(u)}$ geht damit

in den Quotienten zweier Polynome über, die in t quadratisch sind. Die Nullstellen des Zählers sind ± 1, die des Nenners z und ∞, der Quotient hat infolgedessen die Gestalt $\frac{k(t^2-1)}{k'(t-z)}$, wobei k und k' von t nicht abhängen. Die Diskriminanten und Simultaninvariante von $k(t^2-1)$ und $k'(t-z)$ sind wegen $\alpha\delta-\beta\gamma=1$ gleich den Diskriminanten und der Simultaninvariante von $p(u)$ und $q(u)$, d. h. es ist nach (48·7)

$$k^2 = 1, \quad \left(\frac{k'}{2}\right)^2 = 1, \quad -kk'z = -2z,$$

somit

$$k = \pm 1, \quad k' = \pm 2, \quad \frac{k}{k'} = \frac{1}{2}.$$

50. Eine Laurentsche Reihenentwicklung. Setzen wir zur Abkürzung

$$(1) \qquad I_{\nu,m}(z) = \frac{\Gamma(-m-\nu)}{\Gamma(-\nu)} \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{m}{2}} \mathfrak{P}_\nu^m(z),$$

so folgt aus (49·3)

$$(2) \qquad I_{\nu,m}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \left[\frac{p(u)}{q(u)}\right]^\nu \frac{dv}{v^{m+1}}.$$

Daraus können wir folgendes schließen: Nach (48·1), (49·1) und (48·14) umkreist L_1 die Punkte 0 und $\frac{z-1}{z+1}$ der v-Ebene im positiven Sinn, der Punkt 1 bleibt außerhalb liegen. Wir setzen $\Re(z) > 0$, also $|z-1| < |z+1|$ voraus. Da die Nullstellen von $p(u)$ in der v-Ebene gemäß (48·11) und (48·14) die Punkte $\frac{z-1}{z+1}$ und 1, die von $q(u)$ die Punkte 0 und ∞ sind, ist $\left[\frac{p(u)}{q(u)}\right]^\nu$ eindeutige analytische Funktion von v im Innern eines Kreisringes, dessen Mittelpunkt der Nullpunkt ist, dessen innerer Kreis durch den Punkt $\frac{z-1}{z+1}$ und dessen äußerer Kreis durch den Punkt 1 geht. Man kann die Funktion daher in diesem Kreisring in eine Laurentsche Reihe entwickeln, deren Koeffizienten durch (2) gegeben sind:

$$(3) \qquad \left[\frac{p(u)}{q(u)}\right]^\nu = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} I_{\nu,m}(z)\, v^m.$$

Die Reihe konvergiert gleichmäßig in jedem abgeschlossenen Bereich des Ringes. Gemäß der vorigen Ziffer sind die Koeffizienten von $p(u)$ und $q(u)$ den Bedingungen (48·7) unterworfen; ferner müssen die vier Nullstellen von Zähler und Nenner vier verschiedene Punkte sein; im übrigen sind die Koeffizienten willkürlich, v ist durch (48·13) und (48·9) bestimmt. Der Kreisring ist dadurch bestimmt, daß sein Mittelpunkt der Nullpunkt der

v-Ebene ist und auf seinem inneren und äußeren Kreis je eine Nullstelle von $p(u)$ und ebenso von $q(u)$ liegt.

Wir wenden die Entwicklung auf einen besonderen Fall an, den wir im folgenden brauchen werden. Es sei $a' = c' = 0$, $b' = 1$, also $\tau_1 = 0$ und $\tau_2 = \infty$; im Zähler stehe $q(u)$ statt $p(u)$, d. h. wir haben die Koeffizienten mit Strichen zu versehen und τ statt σ zu schreiben. Die letzte der Bedingungen (48·7) liefert dann $z = b'$, (48·13) $v = \frac{u}{\tau_2}$. Wegen der Voraussetzung $\Re(z) = \Re(b') > 0$ ist $|b' - 1| < |b' + 1|$ also $|\tau_1| < |\tau_2|$ nach (48·9). Schließlich wollen wir noch ν durch $-(\nu + 1)$ ersetzen.

Die Entwicklung lautet somit

$$\left[\frac{q(u)}{2u}\right]^{-\nu-1} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} I_{-\nu-1,\, m}(b')\, \tau_2^{-m}\, u^m. \tag{4}$$

Wie man unmittelbar erkennt, konvergiert diese Reihe in einem Kreisring der u-Ebene, dessen Mittelpunkt der Nullpunkt der u-Ebene ist, auf dessen innerem Kreis τ_1 und auf dessen äußerem τ_2 liegt, d. h. für $|\tau_1| < |u| < |\tau_2|$. Denn in diesem Ring ist $\frac{q(u)}{2u}$ eindeutige analytische Funktion von u. In jedem abgeschlossenen Gebiet des Ringes konvergiert die Reihe gleichmäßig in bezug auf u.

51. Additionstheorem für $\mathfrak{P}_\nu(z)$. Um zum Additionstheorem für $\mathfrak{P}_\nu(z)$ zu gelangen, verwenden wir Formel (49·1) mit $m = 0$:

$$\mathfrak{P}_\nu(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \left[\frac{p(u)}{q(u)}\right]^\nu \frac{dv}{v}. \tag{1}$$

Nach (48·13) ist

$$\ln v = \ln(\sigma_2 - \tau_2) - \ln(\sigma_2 - \tau_1) + \ln(u - \tau_1) - \ln(u - \tau_2),$$

daher mit Rücksicht auf (48·9) und $q(u) = a'(u - \tau_1)(u - \tau_2)$

$$\frac{dv}{v} = \frac{du}{u - \tau_1} - \frac{du}{u - \tau_2} = \frac{(\tau_1 - \tau_2)\, du}{(u - \tau_1)(u - \tau_2)} = \frac{2\, du}{q(u)},$$

somit nach (1)

$$\mathfrak{P}_\nu(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{\bar{L}_1} [p(u)]^\nu [q(u)]^{-\nu-1} du = \frac{1}{\pi i} \int_{\bar{L}_1} \frac{[p(u)]^\nu}{(2u)^{\nu+1}} \left[\frac{q(u)}{2u}\right]^{-\nu-1} du. \tag{2}$$

Nach (48·1), (48·11) und (49·1) schließt $\bar{L}_1$ die Punkte σ_1 und τ_1 ein, σ_2 und τ_2 aus.

Wir wollen nun für $\left[\frac{q(u)}{2u}\right]^{-\nu-1}$ die Entwicklung (50·4) einsetzen. Dann müssen wir dafür sorgen, daß $\bar{L}_1$ in dem Kreisring $|\tau_1| < |u| < |\tau_2|$

verläuft, d. h. wir müssen $|\sigma_1| < |\tau_2|$ und $|\sigma_2| > |\tau_1|$ voraussetzen. Damit ergibt sich aus (2)

$$(3) \qquad \mathfrak{P}_\nu(z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} I_{-\nu-1,m}(b')\, \tau_2^{-m} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \left[\frac{p(u)}{2u}\right]^\nu u^{m-1}\, du.$$

Das hier auftretende Integral erhalten wir aus Formel (49·3), wenn wir dort $a' = c' = 0$, $b' = 1$, somit $z = b$ nach (48·7) und $v = \frac{u}{\sigma_2}$ nach (48·9) und (48·13) setzen. Es wird danach

$$(4) \qquad \Gamma(m-\nu)\, \mathfrak{P}_\nu^{-m}(b) = \Gamma(-\nu) \left(\frac{b-1}{b+1}\right)^{\frac{m}{2}} \frac{\sigma_2^m}{2\pi i} \int_{L_1} \left[\frac{p(u)}{2u}\right]^\nu u^{-m-1}\, du$$

$$= \Gamma(-\nu) \left(\frac{b+1}{b-1}\right)^{\frac{m}{2}} \frac{\sigma_2^{-m}}{2\pi i} \int_{L_1} \left[\frac{p(u)}{2u}\right]^\nu u^{m-1}\, du,$$

weil die Formel (49·3) unempfindlich gegenüber der Zeichenänderung von m ist.

(3) und (4) liefern schließlich mit Rücksicht auf (50·1), (48·9), (4·4) und (17·5)

$$(5) \qquad \mathfrak{P}_\nu(z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} I_{-\nu-1,m}(b')\, \tau_2^{-m} \sigma_2^m \left(\frac{b-1}{b+1}\right)^{\frac{m}{2}} \frac{\Gamma(m-\nu)}{\Gamma(-\nu)} \mathfrak{P}_\nu^{-m}(b)$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{\Gamma(\nu-m+1)\,\Gamma(m-\nu)}{\Gamma(\nu+1)\,\Gamma(-\nu)} \left(\frac{b'+1}{b'-1}\right)^{\frac{m}{2}} \mathfrak{P}_{-\nu-1}^m(b') \left(\frac{b'+1}{b'-1}\right)^{-\frac{m}{2}}$$

$$\times e^{-mv'}(-1)^m \left(\frac{b+1}{b-1}\right)^{\frac{m}{2}} e^{mv} \left(\frac{b-1}{b+1}\right)^{\frac{m}{2}} \mathfrak{P}_\nu^{-m}(b)$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \mathfrak{P}_\nu^m(b')\, \mathfrak{P}_\nu^{-m}(b)\, e^{m(v-v')}$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \mathfrak{P}_\nu^{-m}(b')\, \mathfrak{P}_\nu^m(b)\, e^{m(v'-v)}.$$

Nach (22·5) ist

$$\mathfrak{P}_\nu^m(b)\, \mathfrak{P}_\nu^{-m}(b') = \mathfrak{P}_\nu^{-m}(b)\, \mathfrak{P}_\nu^m(b')$$

somit, wenn wir

$$(6) \qquad \zeta = v - v'$$

einführen und (48·10) berücksichtigen

$$(7) \qquad \mathfrak{P}_\nu(bb' + \sqrt{b^2-1}\sqrt{b'^2-1}\,\mathfrak{Cof}\,\zeta) = \mathfrak{P}_\nu(b)\, \mathfrak{P}_\nu(b')$$

$$+ 2 \sum_{m=1}^{\infty} \mathfrak{P}_\nu^m(b)\, \mathfrak{P}_\nu^{-m}(b')\, \mathfrak{Cof}\, m\zeta.$$

Man überzeugt sich leicht, daß die Winkel richtig gewählt sind, denn $b' \to 1$ liefert mit Rücksicht auf (17·6) und (38·1) eine Identität.

Die Bedingungen $|\sigma_1| < |\tau_2|$ und $|\sigma_2| > |\tau_1|$ lauten nach (48·9)

$$\sqrt{\left|\frac{b-1}{b+1}\frac{b'-1}{b'+1}\right|}\, e^{\pm \Re(v-v')} < 1$$

oder

$$\pm \Re(v-v') < \frac{1}{2}\ln\left|\frac{b+1}{b-1}\frac{b'+1}{b'-1}\right|.$$

Es muß also

$$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{b+1}{b-1}\frac{b'+1}{b'-1}\right| > 0$$

oder

$$\left|\frac{b+1}{b-1}\frac{b'+1}{b'-1}\right| > 1 \tag{8}$$

und

$$|\Re(\zeta)| < \frac{1}{2}\ln\left|\frac{b+1}{b-1}\frac{b'+1}{b'-1}\right| \tag{9}$$

sein. Die frühere Bedingung $\left|\frac{b'+1}{b'-1}\right| > 1$ können wir fallen lassen. Denn aus (8) folgt mindestens eine der beiden Ungleichungen

$$\left|\frac{b+1}{b-1}\right| > 1 \quad \text{oder} \quad \left|\frac{b'+1}{b'-1}\right| > 1. \tag{10}$$

Da sich aber die Entwicklung (5) nicht ändert, wenn man b und b' vertauscht, so genügt eine der Ungleichungen (10).

Wir können demnach sagen: es gilt

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}_\nu(bb' + \sqrt{b^2-1}\sqrt{b'^2-1}\,\mathfrak{Cof}\,\zeta) \\ = \mathfrak{P}_\nu(b)\,\mathfrak{P}_\nu(b') + 2\sum_{m=1}^{\infty}\mathfrak{P}_\nu^m(b)\,\mathfrak{P}_\nu^{-m}(b')\,\mathfrak{Cof}\,m\zeta, \end{aligned} \tag{11}$$

$$\text{falls} \quad |\Re(\zeta)| < \frac{1}{2}\ln\left|\frac{b+1}{b-1}\frac{b'+1}{b'-1}\right| \quad \text{ist.}$$

Die Entwicklung (5) ist eine LAURENTsche Reihe, die nach positiven und negativen Potenzen von e^ζ fortschreitet, also in einem Kreisring $A < |e^\zeta| < B$ oder für $\ln A < \Re(\zeta) < \ln B$ konvergiert. Sie konvergiert demnach in jedem abgeschlossenen Bereich dieses Gebietes gleichmäßig in bezug auf ζ. Nach (11) lautet die Konvergenzbedingung

$$-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{b+1}{b-1}\frac{b'+1}{b'-1}\right| < \Re(\zeta) < \frac{1}{2}\ln\left|\frac{b+1}{b-1}\frac{b'+1}{b'-1}\right|,$$

die Reihe (11) konvergiert daher gleichmäßig bezüglich ζ in jedem abgeschlossenen Bereich des Gebietes $|\Re(\zeta)| < \frac{1}{2}\ln\left|\frac{b+1}{b-1}\frac{b'+1}{b'-1}\right|$. (11) ist das gesuchte Additionstheorem von $\mathfrak{P}_\nu(z)$.

52. Konvergenzgebiet. Man kann die Konvergenzbedingung in mehr geometrischer Fassung aussprechen. Wir zerlegen ζ in seinen reellen und imaginären Teil und setzen

$$(1)\qquad \begin{aligned} \sqrt{b^2-1}\,\sqrt{b'^2-1} &= \left|\sqrt{b^2-1}\,\sqrt{b'^2-1}\right| e^{i\alpha}, \\ z_0 &= b b', \\ z_1 &= b b' + \sqrt{b^2-1}\,\sqrt{b'^2-1}, \\ z_2 &= b b' - \sqrt{b^2-1}\,\sqrt{b'^2-1}. \end{aligned}$$

Dann ist nach (48·10) und (51·6)

$$(2)\qquad \begin{aligned} \zeta &= \xi + i\eta, \\ \mathfrak{Cof}\,\zeta &= \mathfrak{Cof}\,\xi\cos\eta + i\,\mathfrak{Sin}\,\xi\sin\eta, \\ z - z_0 &= \left|\sqrt{b^2-1}\,\sqrt{b'^2-1}\right| e^{i\alpha}(\mathfrak{Cof}\,\xi\cos\eta + i\,\mathfrak{Sin}\,\xi\sin\eta). \end{aligned}$$

Nun führen wir noch

$$(3)\qquad \begin{cases} x = \left|\sqrt{b^2-1}\,\sqrt{b'^2-1}\right| \mathfrak{Cof}\,\xi\cos\eta, \\ y = \left|\sqrt{b^2-1}\,\sqrt{b'^2-1}\right| \mathfrak{Sin}\,\xi\sin\eta \end{cases}$$

ein. x und y sind die rechtwinkligen Koordinaten des Punktes z, bezogen auf ein Achsenkreuz, dessen Mittelpunkt der Punkt z_0 und dessen X-Achse die Gerade $z_2 z_1$ ist, die mit der reellen Achse der z-Ebene den Winkel α einschließt (Abb. 43).

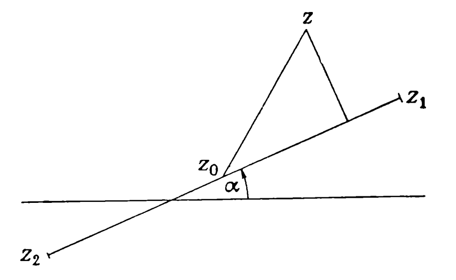


Abb. 43.

Aus (3) und (1) folgt

$$\frac{x^2}{(|z_1-z_0|\,\mathfrak{Cof}\,\xi)^2} + \frac{y^2}{(|z_1-z_0|\,\mathfrak{Sin}\,\xi)^2} = 1,$$

d. h. der Punkt z beschreibt bei festem ξ eine Ellipse mit dem Mittelpunkt z_0 und den Halbachsen $|z_1-z_0|\,\mathfrak{Cof}\,\xi$ und $|z_1-z_0|\,|\mathfrak{Sin}\,\xi|$. Wegen $\mathfrak{Cof}^2\xi - \mathfrak{Sin}^2\xi = 1$ sind z_1 und z_2 ihre Brennpunkte. Die zu diesen Brennpunkten gehörige Schar von konfokalen Ellipsen erhält man, wenn ξ

alle positiven Zahlen durchläuft, dieselbe Schar aber auch, wenn ξ alle negativen Zahlen durchläuft, wobei zwei Werten von ξ mit demselben Betrag dieselbe Ellipse entspricht. Änderung des Vorzeichens von ξ bedeutet nach (3) Spiegelung des Punktes z an der Geraden $z_2 z_1$. Dem Wert $\xi = 0$ entspricht die Strecke $z_2 z_1$.

Aus (3) und (1) errechnet man auch

$$\frac{x^2}{(|z_1 - z_0| \cos\eta)^2} - \frac{y^2}{(|z_1 - z_0| \sin\eta)^2} = 1,$$

d. h. der Punkt z beschreibt bei festem η eine Hyperbel mit dem Mittelpunkt z_0 und den Halbachsen $|z_1 - z_0|\,|\cos\eta|$ und $|z_1 - z_0|\,|\sin\eta|$. Wegen $\cos^2\eta + \sin^2\eta = 1$ sind z_1 und z_2 ihre Brennpunkte. Die zu diesen Brennpunkten gehörige Schar von konfokalen Hyperbeln erhält man für $0 < \eta < \pi$; die zu $\frac{\pi}{2}$ symmetrisch gelegenen Werte von η liefern die beiden Zweige derselben Hyperbel. Für $0 > \eta > -\pi$ erhält man dieselbe Schar von Hyperbeln, wobei zwei Werten von η mit demselben Betrag dieselbe Hyperbel entspricht. Änderung des Vorzeichens von η bedeutet nach (3) Spiegelung des Punktes z an der Geraden $z_2 z_1$. $\eta = 0$ bzw. π liefert die von z_1 bzw. z_2 ins Unendliche reichenden Teile der Geraden $z_2 z_1$, $\eta = \pm\frac{\pi}{2}$ die im Punkte z_0 auf dieser Geraden errichtete Senkrechte. ξ und η sind also elliptische Koordinaten des Punktes z.

Wir wollen diejenigen Ellipsen der Schar bestimmen, welche durch die Punkte ± 1 gehen. Die zugehörigen Werte von ξ seien ξ_1 und ξ_2. Für den Punkt 1 erhält man nach (48·10) und (51·6)

$$bb' + \sqrt{b^2 - 1}\sqrt{b'^2 - 1}\,\mathfrak{Cof}\,\zeta = 1,$$

$$\sqrt{b^2 - 1}\sqrt{b'^2 - 1}\,(e^{2\zeta} + 1) + 2(bb' - 1)\,e^{\zeta} = 0,$$

$$e^{\zeta} = \frac{-(bb' - 1) \pm \sqrt{(bb' - 1)^2 - (b^2 - 1)(b'^2 - 1)}}{\sqrt{b^2 - 1}\sqrt{b'^2 - 1}}$$

$$= \frac{-(bb' - 1) \pm (b - b')}{\sqrt{b^2 - 1}\sqrt{b'^2 - 1}}$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{(b+1)(b'-1)}{\sqrt{b^2 - 1}\sqrt{b'^2 - 1}} = -\sqrt{\dfrac{b+1}{b-1}}\sqrt{\dfrac{b'-1}{b'+1}}, \\[2ex] -\dfrac{(b-1)(b'+1)}{\sqrt{b^2 - 1}\sqrt{b'^2 - 1}} = -\sqrt{\dfrac{b-1}{b+1}}\sqrt{\dfrac{b'+1}{b'-1}}, \end{cases}$$

(4) $$\xi_1 = \pm\frac{1}{2}\ln\left|\frac{b+1}{b-1}\,\frac{b'-1}{b'+1}\right|$$

oder

$$|\xi_1| = \frac{1}{2}\left|\ln\left|\frac{b+1}{b-1}\,\frac{b'-1}{b'+1}\right|\right|.$$

Ebenso ergibt sich für den Punkt -1

$$e^\xi = \frac{-(b\,b'+1) \pm (b+b')}{\sqrt{b^2-1}\,\sqrt{b'^2-1}}$$

$$= \begin{cases} -\sqrt{\dfrac{b-1}{b+1}}\sqrt{\dfrac{b'-1}{b'+1}}, \\ -\sqrt{\dfrac{b+1}{b-1}}\sqrt{\dfrac{b'+1}{b'-1}} \end{cases}$$

oder

(5) $$|\xi_2| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{b+1}{b-1}\,\frac{b'+1}{b'-1}\right|.$$

Damit können wir die Konvergenzbedingung in (51·11) nach (2) in der Form $|\xi| < |\xi_2|$ aussprechen, d. h. der Punkt z muß innerhalb der durch den Punkt -1 gehenden Ellipse liegen. Diese hinreichende Bedingung ist auch notwendig. Denn nach (23·2) sind die Grenzwerte von $\mathfrak{P}_\nu(z)$, denen $\mathfrak{P}_\nu(z)$ zustrebt, wenn sich z auf der oberen bzw. unteren Halbebene einem Punkte des Intervalls $-1 < z < +1$ unbegrenzt nähert, einander gleich, $+1$ ist reguläre Stelle nach Ziffer 17. Dagegen ist nach (22·7) für $z > 1$ und $h > 0$

$$\lim_{h\to 0} \mathfrak{P}_\nu(-z \pm hi) = e^{\pm i\pi\nu}\,\mathfrak{P}_\nu(z) - \frac{2}{\pi}\sin\pi\nu\,\mathfrak{Q}_\nu(z).$$

Um daher $\mathfrak{P}_\nu(z)$ eindeutig zu machen, schneiden wir die z-Ebene längs der reellen Achse von -1 nach $-\infty$ auf. Ellipsen mit $|\xi| > |\xi_2|$ würden also diesen Schnitt treffen. Bei analytischer Fortsetzung über den Schnitt würde daher die Reihe (51·11) nicht mehr $\mathfrak{P}_\nu(z)$, sondern diesen um den Sprung verminderten Wert liefern.

53. Additionstheorem für $\mathfrak{Q}_\nu(z)$. Ein Vergleich der Formeln (1) und (4) von Ziffer 49 zeigt mit Hilfe von (4·4), daß man die Formel (4) aus der Formel (1) erhält, wenn man den Faktor $c_\nu = \dfrac{\pi e^{-i\pi(\nu+1)}}{2\sin\pi\nu}$ hinzufügt und statt des Integrationsweges L_1 bzw. $\bar{L}_1$ den Weg L_2 bzw. $\bar{L}_2$ nimmt. Nach Ziffer 49 und (48·11) umläuft $\bar{L}_2$ den Punkt σ_2 im positiven und dann den Punkt σ_1 im negativen Sinn und läßt dabei die Punkte τ_1 und τ_2 außerhalb liegen. Wie in Ziffer 51 erhalten wir, da auch (49·5) unempfindlich gegen-

über einer Vorzeichenänderung von m ist,

(1) $$\mathfrak{Q}_\nu(z) = \frac{c_\nu}{2\pi i}\int\limits_{L_2}\left[\frac{p(u)}{q(u)}\right]^\nu \frac{dv}{v} = \frac{c_\nu}{\pi i}\int\limits_{L_2} \frac{[p(u)]^\nu}{(2u)^{\nu+1}}\left[\frac{q(u)}{2u}\right]^{-(\nu+1)} du$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} I_{-\nu-1,m}(b')\tau_2^{-m}\sigma_2^m \left(\frac{b-1}{b+1}\right)^{\frac{m}{2}} \frac{\Gamma(m-\nu)}{\Gamma(-\nu)}\mathfrak{Q}_\nu^{-m}(b)$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \mathfrak{P}_\nu^m(b')\mathfrak{Q}_\nu^{-m}(b)e^{m(v-v')}$$

$$= \mathfrak{P}_\nu(b')\mathfrak{Q}_\nu(b) + 2\sum_{m=1}^{\infty}\mathfrak{P}_\nu^m(b')\mathfrak{Q}_\nu^{-m}(b)\,\mathfrak{Cof}\, m\zeta.$$

Da der Integrationsweg $\bar{L}_2$ im Bereich der Entwicklung (50·4) liegen muß, hat man $|\tau_1| < |\sigma_2| < |\tau_2|$ und $|\tau_1| < |\sigma_1| < |\tau_2|$ vorauszusetzen. Das gibt nach (48·9) und (51·6)

(2) $$\begin{cases} \frac{1}{2}\ln\left|\frac{b-1}{b+1}\frac{b'-1}{b'+1}\right| < \xi < \frac{1}{2}\ln\left|\frac{b-1}{b+1}\frac{b'+1}{b'-1}\right| \\ \text{und} \\ \frac{1}{2}\ln\left|\frac{b+1}{b-1}\frac{b'-1}{b'+1}\right| < \xi < \frac{1}{2}\ln\left|\frac{b+1}{b-1}\frac{b'+1}{b'-1}\right|. \end{cases}$$

Es muß also

$$\left|\frac{b-1}{b+1}\frac{b'-1}{b'+1}\right| < \left|\frac{b+1}{b-1}\frac{b'+1}{b'-1}\right|$$

und

$$\left|\frac{b+1}{b-1}\frac{b'-1}{b'+1}\right| < \left|\frac{b-1}{b+1}\frac{b'+1}{b'-1}\right|$$

oder

(3) $$\left|\frac{b'-1}{b'+1}\right| < \left|\frac{b+1}{b-1}\right| \quad \text{und} \quad \left|\frac{b+1}{b-1}\right| < \left|\frac{b'+1}{b'-1}\right|$$

sein. Dazu kommt noch von Ziffer 50 die Bedingung

(4) $$|b'-1| < |b'+1|,$$

die jetzt eine Folge von (3) ist. Da $\left|\frac{b-1}{b+1}\right| < \left|\frac{b'+1}{b'-1}\right|$ nach (3) gilt, so kann man die Ungleichungen (3) und (4) auch in der Gestalt

(5) $$\left|\ln\left|\frac{b+1}{b-1}\right|\right| < \ln\left|\frac{b'+1}{b'-1}\right|$$

zusammenfassen.

Zufolge (52·4) und (3) ist

$$|\xi_1| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{b-1}{b+1}\frac{b'+1}{b'-1}\right|,$$

sonach mit (52·5) und (2)

$$|\xi| < |\xi_1|, \quad |\xi_2|.$$

Die Reihe in (1) konvergiert also im Innern der kleineren der beiden Ellipsen, die durch die Punkte ± 1 gehen, und zwar gleichmäßig bezüglich ζ in jedem abgeschlossenen Teilbereich, was sich wie in Ziffer 51 ergibt.

54. Analytische Fortsetzung der Formel. Ist $v = v' = \zeta = 0$, also $z = z_1$ nach (48·10) und (52·1), so werden τ_1 und τ_2 bzw. σ_1 und σ_2 gemäß (48·9) durch die imaginäre Achse nicht getrennt (Abb. 44). Die Winkel in

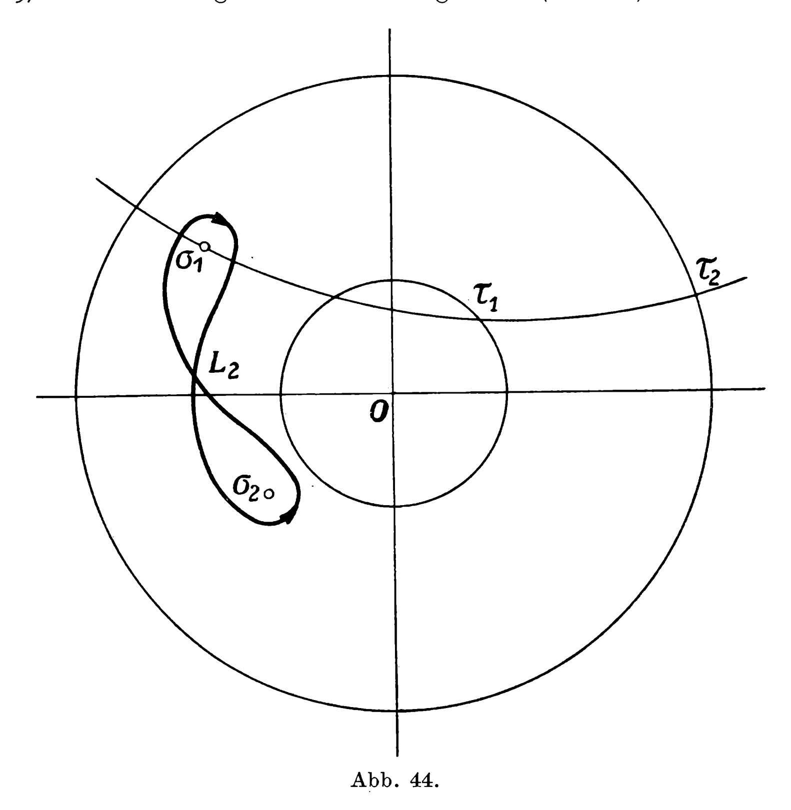


Abb. 44.

(53·1) sind in diesem Fall richtig gewählt, was sich wie in Ziffer 51 durch $b' \to 1$ ergibt. Die Entwicklung gilt nun nach den Regeln der analytischen Fortsetzung auch für $\zeta = v - v' \neq 0$, wenn wir die Fortsetzung von $\zeta = 0$ an beginnen und im Innern der kleineren der beiden zu $|\xi_1|$ und $|\xi_2|$ gehörigen Ellipsen bleiben, solange nicht z die von 1 nach $-\infty$ aufgeschnittene reelle Achse trifft. Denn in der so aufgeschnittenen z-Ebene ist $\mathfrak{Q}_\nu(z)$ nach Ziffer 19 eindeutig.

Gemäß (23·4) ist für $-1 < z < +1$ mit $h > 0$ und $\mu = 0$

$$\lim_{h \to 0} \mathfrak{Q}_\nu(z + hi) - \lim_{h \to 0} \mathfrak{Q}_\nu(z - hi) = -i\pi P_\nu(z).$$

Überschreitet also z bei der analytischen Fortsetzung von der oberen in die untere Halbebene die reelle Achse zwischen -1 und $+1$, so erhält man statt des in der aufgeschnittenen Ebene definierten Wertes $\mathfrak{Q}_\nu(z)$ den Wert $\mathfrak{Q}_\nu(z) - i\pi P_\nu(z)$ bzw. $\mathfrak{Q}_\nu(z) + i\pi P_\nu(z)$, wenn z von der unteren in die obere Halbebene rückt.

Ferner ist nach (22·8) für $z > 1$ und $\mu = 0$

$$\lim_{h \to 0} \mathfrak{Q}_\nu(-z \pm hi) = -e^{\mp i\pi\nu} \mathfrak{Q}_\nu(z)$$

und

$$\frac{\lim\limits_{h \to 0} \mathfrak{Q}_\nu(-z - hi)}{\lim\limits_{h \to 0} \mathfrak{Q}_\nu(-z + hi)} = e^{2i\pi\nu}.$$

Überschreitet demnach z bei der Fortsetzung von der oberen in die untere Halbebene die reelle Achse zwischen -1 und $-\infty$, so erhält man statt des in der aufgeschnittenen Ebene definierten Wertes $\mathfrak{Q}_\nu(z)$ den Wert $e^{-2i\pi\nu} \mathfrak{Q}_\nu(z)$ bzw. $e^{+2i\pi\nu} \mathfrak{Q}_\nu(z)$, wenn z von der unteren in die obere Halbebene rückt.

Als Konvergenzgebiet kommt nur die kleinere der beiden, durch die Punkte ± 1 gehenden Ellipsen der konfokalen Schar in Frage. Geht diese Ellipse durch den Punkt -1, so darf demnach der Punkt $+1$ nicht in ihrem Innern liegen. Es sind dann folgende Fälle möglich: Die Ellipse wird von der reellen Achse berührt oder von ihr in zwei Teile zerlegt. In dem letzteren Fall gehört das innerhalb der Ellipse liegende Stück der reellen Achse entweder ganz der Strecke $(-1, +1)$ oder ganz dem von -1 nach $-\infty$ reichenden Teil der reellen Achse an. Geht die Ellipse dagegen durch den Punkt $+1$, so tritt an Stelle des von -1 nach $-\infty$ reichenden Teiles der von $+1$ nach $+\infty$ reichende Teil. Infolgedessen kann man die reelle Achse entweder nur zwischen $-\infty$ und -1 oder nur zwischen $+1$ und $+\infty$ überschreiten. Niemals sind zwei dieser Fälle innerhalb der Ellipsen gleichzeitig möglich.

Wir können damit das Ergebnis dieser Untersuchung so zusammenfassen: Wenn

$$\left| \ln \left| \frac{b+1}{b-1} \right| \right| < \ln \left| \frac{b'+1}{b'-1} \right|,$$

d. h. $|\mathfrak{R}(\zeta)| < |\xi_1|, |\xi_2|$ ist, so gilt die Entwicklung

$$(1)\quad \mathfrak{P}_\nu(b')\mathfrak{Q}_\nu(b) + 2\sum_{m=1}^{\infty} \mathfrak{P}_\nu^m(b')\mathfrak{Q}_\nu^{-m}(b)\,\mathfrak{Cos}\,m\zeta$$
$$= f(bb' + \sqrt{b^2-1}\sqrt{b'^2-1}\,\mathfrak{Cos}\,\zeta);$$

dabei ist

$$f(z) = e^{\left(\frac{\operatorname{arc} z}{|\operatorname{arc} z|} - \frac{\operatorname{arc} z_1}{|\operatorname{arc} z_1|}\right)\pi i \nu}\,\mathfrak{Q}_\nu(z),$$

wenn die Strecke $(-1, +1)$ von der Strecke (z_1, z) nicht getroffen wird (mit einer gleich zu besprechenden Ausnahme), dagegen

$$f(z) = \mathfrak{Q}_\nu(z) + \frac{\operatorname{arc} z}{|\operatorname{arc} z|}\pi i P_\nu(z),$$

wenn das Gegenteil der Fall ist. Denn $\frac{\operatorname{arc} z}{|\operatorname{arc} z|}$ bedeutet das Vorzeichen von $\operatorname{arc} z$, also ± 1 wegen $|\operatorname{arc} z| < \pi$, je nachdem z in der oberen bzw. unteren Halbebene liegt. Dasselbe gilt natürlich auch für z_1. Die Ausnahme betrifft den Fall, daß die Strecke (z_1, z) die reelle Achse zwischen $+1$ und $+\infty$ schneidet. Dann ist $f(z) = \mathfrak{Q}_\nu(z)$.

55. Additionstheorem für $P_\nu(z)$ und $Q_\nu(z)$ bei $-1 < z < +1$. Die Winkel $\vartheta, \vartheta', \vartheta+\vartheta'$ sollen zwischen 0 und π liegen, die Grenzen ausgeschlossen, ferner sei $b = \cos\vartheta + hi$, $b' = \cos\vartheta' + hi$ $(h>0)$. Entwickeln wir nach Potenzen von h, so wird

$$(1)\quad \sqrt{b^2-1} = i\sin\vartheta + h\operatorname{ctg}\vartheta + \cdots,$$
$$\sqrt{b'^2-1} = i\sin\vartheta' + h\operatorname{ctg}\vartheta' + \cdots$$

Nach (23·2) ist

$$\lim_{h\to 0} \mathfrak{P}_\nu^m(b) = e^{-\frac{i\pi m}{2}} P_\nu^m(\cos\vartheta).$$

Dadurch erhalten wir aus (51·11) mit $h\to 0$ und $\xi = 0$, also $\zeta = i\eta$

$$(2)\quad P_\nu(\cos\vartheta\cos\vartheta' - \sin\vartheta\sin\vartheta'\cos\eta)$$
$$= P_\nu(\cos\vartheta)P_\nu(\cos\vartheta') + 2\sum_{m=1}^{\infty} P_\nu^m(\cos\vartheta)P_\nu^{-m}(\cos\vartheta')\cos m\eta.$$

Die Konvergenzbedingung lautet

$$\operatorname{ctg}\frac{\vartheta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\vartheta'}{2} > 1$$

oder

$$\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2} < \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\vartheta'}{2}\right)$$

oder

$$\frac{\vartheta}{2} < \frac{\pi}{2} - \frac{\vartheta'}{2};$$

sie ist demnach erfüllt. Die Reihe konvergiert gleichmäßig in bezug auf η.

Ist $\nu = n$ eine ganze positive Zahl, so ist $P_n^m(\cos\vartheta) = 0$ für $m > n$ gemäß der Definition in Ziffer 23 und (I, 18), ferner nach (23·2) und (22·6)

$$(3) \qquad P_n^{-m}(\cos\vartheta') = e^{-\frac{i\pi m}{2}} \lim_{h\to 0} \mathfrak{P}_n^{-m}(b')$$

$$= e^{-\frac{i\pi m}{2}} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \lim_{h\to 0} \mathfrak{P}_n^m(b')$$

$$= (-1)^m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos\vartheta');$$

infolgedessen erhält man aus (2) für $\eta = \pi - (\varphi - \varphi')$ die Formel (I, 48·4). Diese können wir mit Hilfe von (3) auch in der Gestalt

$$(4) \qquad P_n[\cos\vartheta\cos\vartheta' + \sin\vartheta\sin\vartheta'\cos(\varphi - \varphi')]$$

$$= \sum_{m=-n}^{+n} (-1)^m P_n^m(\cos\vartheta)\, P_n^{-m}(\cos\vartheta')\, e^{im(\varphi-\varphi')}$$

schreiben. Daß die Formel (3) nicht mit (22·6) übereinstimmt, liegt an der Definition von $P_\nu^\mu(z)$ für $-1 < z < +1$ in Ziffer 23.

Nun wollen wir (1) mit $\xi = 0$ und $h \to 0$ unter derselben Voraussetzung über die Winkel ϑ und ϑ' in (53·1) einführen. Die Konvergenzbedingung (53·5) liefert

$$-\ln\operatorname{ctg}\frac{\vartheta'}{2} < \ln\operatorname{ctg}\frac{\vartheta}{2} < \ln\operatorname{ctg}\frac{\vartheta'}{2}$$

oder

$$\operatorname{tg}\frac{\vartheta'}{2} < \operatorname{ctg}\frac{\vartheta}{2} < \operatorname{ctg}\frac{\vartheta'}{2},$$

somit auch $\vartheta > \vartheta'$ zu den früheren Voraussetzungen. Für z_1 erhält man nach (52·1)

$$z_1 = \cos(\vartheta + \vartheta') + hi\,[\cos\vartheta + \cos\vartheta' + \sin\vartheta\operatorname{ctg}\vartheta' + \sin\vartheta'\operatorname{ctg}\vartheta + \cdots$$

$$= \cos(\vartheta + \vartheta') + hi\,\frac{\sin(\vartheta + \vartheta')(\sin\vartheta + \sin\vartheta')}{\sin\vartheta\sin\vartheta'} + \cdots,$$

es liegt also für sehr kleine h in der oberen Halbebene.

Ferner hat man nach (23·2)

$$\lim_{h\to 0} \mathfrak{P}_\nu^m(b') = e^{-\frac{i\pi m}{2}} P_\nu^m(\cos\vartheta'),$$

nach (23·6)

$$\lim_{h\to 0} \mathfrak{Q}_\nu^{-m}(b) = e^{-\frac{3i\pi m}{2}} \left[Q_\nu^{-m}(\cos\vartheta) - \frac{i\pi}{2} P_\nu^{-m}(\cos\vartheta)\right]$$

und ebenso

$$\lim_{h\to 0} \mathfrak{Q}_\nu(bb' + \sqrt{b^2-1}\sqrt{b'^2-1}\cos\eta) = Q_\nu(\cos\vartheta\cos\vartheta' - \sin\vartheta\sin\vartheta'\cos\eta)$$
$$- \frac{i\pi}{2} P_\nu(\cos\vartheta\cos\vartheta' - \sin\vartheta\sin\vartheta'\cos\eta),$$

infolgedessen schließlich nach Verwendung von (2) und (53·1)

(5) $$Q_\nu(\cos\vartheta\cos\vartheta' - \sin\vartheta\sin\vartheta'\cos\eta)$$
$$= P_\nu(\cos\vartheta')\,Q_\nu(\cos\vartheta) + 2\sum_{m=1}^{\infty} P_\nu^m(\cos\vartheta')\,Q_\nu^{-m}(\cos\vartheta)\cos m\eta.$$

Die Reihe konvergiert gleichmäßig in bezug auf η.

C. NEUMANN[1]) hat das Additionstheorem von LEGENDRE (I, 48·4) auf die LEGENDREsche Funktion zweiter Art ausgedehnt. Verallgemeinerungen auf beliebige Werte von Veränderlicher und Zeiger stammen von HEINE[2]) und HOBSON[3]); die in den Ziffern 48—55 gegebene Darstellung geht auf R. LAGRANGE[4]) zurück.

---

[1]) C. NEUMANN, Leipziger Abh. 1886.

[2]) Siehe Fußnote in Ziffer 32.

[3]) Siehe Fußnote in Ziffer (I, 18).

[4]) R. LAGRANGE, Polynomes et fonctions de Legendre, Mémorial des sciences mathématiques, Heft 97, Paris 1939, Gauthier-Villars. Dieses Heft enthält ein reichhaltiges Verzeichnis der Literatur über Kugelfunktionen.

III. Anwendungen der Kugelfunktionen.

§ 1. Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeitsmassen, Anziehung der Sphäroide.

1. Sphäroid. Im folgenden wollen wir als erste Anwendung der Kugelfunktionen, die wir im ersten Teil kennengelernt haben, die Frage nach den Gleichgewichtsfiguren von Flüssigkeitsmassen beantworten, die sich wenig von der Kugel unterscheiden (Sphäroid), wie ein starrer Körper mit kleiner fester Winkelgeschwindigkeit ω um eine feste Achse drehen und deren Teilchen sich nach dem NEWTONschen Gesetz anziehen. Wir folgen dabei auch dem Gang der Geschichte, denn es war diese Fragestellung, an der LAPLACE und LEGENDRE die Lehre von den Kugelfunktionen entwickelt hatten.

Das Sphäroid sei ein schwach abgeplattetes Drehellipsoid mit der Gleichung

$$\frac{x^2 + y^2}{A^2} + \frac{z^2}{B^2} = 1, \tag{1}$$

die Drehachse also die Z-Achse. Die Abplattung

$$\alpha = \frac{A - B}{A} \tag{2}$$

sei eine kleine Größe, von der wir die höheren Potenzen als die erste vernachlässigen wollen. Führen wir Kugelkoordinaten (I, 2·1) ein, so geht die Gleichung (1) über in

$$r^2 \left(\frac{\sin^2 \vartheta}{A^2} + \frac{\cos^2 \vartheta}{B^2}\right) = 1. \tag{3}$$

Aus (2) erhalten wir $B = A(1 - \alpha)$, also aus (3)

$$r^2 [\sin^2 \vartheta + (1 + 2\alpha) \cos^2 \vartheta] = A^2$$

oder

$$r^2 = \frac{A^2}{1 + 2\alpha \cos^2 \vartheta},$$

$$r = A(1 - \alpha \cos^2 \vartheta).$$

Führen wir nach (I, 13·1)

$$P_2(\cos\vartheta) = \frac{3\cos^2\vartheta - 1}{2}$$

oder

$$\cos^2\vartheta = \frac{1 + 2P_2(\cos\vartheta)}{3}$$

ein, so wird

$$r = A\left[1 - \frac{\alpha}{3} - \frac{2}{3}\alpha P_2(\cos\vartheta)\right].$$

$a_0 = A\left(1 - \frac{\alpha}{3}\right)$ ist der Halbmesser einer Kugel, die gleichen Rauminhalt wie das Drehellipsoid hat. Die Meridiankurve des Ellipsoids ist damit durch die Gleichung

(4)
$$r = a_0\left[1 - \frac{2}{3}\alpha P_2(\cos\vartheta)\right]$$

gegeben, selbstverständlich alles immer mit Ausnahme der höheren Potenzen von α.

Wir schreiben in dieser Gleichung a an Stelle von a_0, setzen $\alpha = \varepsilon u$, wobei u eine Funktion von a und ε eine feste positive Zahl sein soll, von der wir die höheren Potenzen als die erste vernachlässigen wollen, und lassen a stetig von 0 bis a_0 wachsen. Dadurch erhalten wir eine Reihe ineinander geschachtelter Sphäroide. Jedes solche Sphäroid sei eine Fläche gleicher Dichte ϱ, d. h. ϱ soll nur eine Funktion von a sein.

Die Meridiankurve einer solchen Schichtfläche ist also durch

(5)
$$r = a\left[1 - \frac{2}{3}\varepsilon u P_2(\cos\vartheta)\right]$$

gegeben.

Die zur Oberfläche gehörigen Werte von r wollen wir mit r_0 bezeichnen, so daß also von nun an r_0 statt r in (4) zu schreiben ist.

2. Potential eines Sphäroids in einem äußeren Punkt. Wir konstruieren nun mit O als Mittelpunkt die kleinste Kugel, von der das Sphäroid gerade noch umschlossen wird. Der Punkt P liege außerhalb dieser Kugel, seine Kugelkoordinaten seien r, ϑ, φ; P' möge innerhalb des Sphäroids liegen und die Koordinaten r', ϑ', φ' haben, γ sei der Winkel POP'. Aus (I, 10·2) und (I, 11) erhält man wegen $r' < r$ die gleichmäßig konvergente Entwicklung

$$\frac{1}{\overline{PP'}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n(\cos\gamma)\, r'^n}{r^{n+1}},$$

daher für das Potential des Sphäroids im Aufpunkt P

$$(1)\quad V_a = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{\pi} \sin\vartheta' P_n(\cos\gamma)\, d\vartheta' \int_0^{r_0} \varrho r'^{\,n+2} dr'$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{\pi} \sin\vartheta' P_n(\cos\gamma)\, d\vartheta' \int_0^{a_0} \varrho r'^{\,n+2} \frac{\partial r'}{\partial a} da$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+3)\, r^{n+1}} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{\pi} \sin\vartheta' P_n(\cos\gamma)\, d\vartheta' \int_0^{a_0} \varrho \frac{\partial (r'^{\,n+3})}{\partial a} da$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+3)\, r^{n+1}} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{\pi} P_n(\cos\gamma) \sin\vartheta'\, d\vartheta' \int_0^{a_0} \varrho \frac{\partial}{\partial a} \Big\{ a^{n+3} \Big[1 - \frac{2}{3}(n+3)\, \varepsilon u P_2(\cos\vartheta') \Big] \Big\} da$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+3)\, r^{n+1}} \Bigg[\int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{\pi} P_n(\cos\gamma) \sin\vartheta'\, d\vartheta' \int_0^{a_0} \varrho \frac{\partial a^{n+3}}{\partial a} da$$

$$- \frac{2}{3}\, \varepsilon (n+3) \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{\pi} P_n(\cos\gamma)\, P_2(\cos\vartheta') \sin\vartheta'\, d\vartheta' \int_0^{a_0} \varrho \frac{\partial (u a^{n+3})}{\partial a} da \Bigg]$$

$$= \frac{4\pi}{3r} \int_0^{a_0} \varrho \frac{\partial a^3}{\partial a} da - \frac{1}{5r^3} \cdot \frac{2}{3}\, \varepsilon \cdot 5 \cdot \frac{4\pi}{5} P_2(\cos\vartheta) \int_0^{a_0} \varrho \frac{\partial (u a^5)}{\partial a} da$$

$$= \frac{4\pi}{r} \int_0^{a_0} \varrho a^2 da - \frac{8\pi\varepsilon}{15 r^3} P_2(\cos\vartheta) \int_0^{a_0} \varrho \frac{\partial (u a^5)}{\partial a} da.$$

Wir haben dabei (I, 49·1) und (I, 49·2) benützt. Wir werden diese Formel in der nächsten Ziffer auch für das Potential auf der Oberfläche des Sphäroids verwenden. Allerdings müßte dann noch gezeigt werden, daß auch in diesem Fall der vernachlässigte Teil ε^2 als Faktor enthält, worauf wir aber nicht näher eingehen wollen. R. WAVRE[1]) hat diese Schwierigkeit durch einen Kunstgriff behoben.

3. Gleichgewichtsbedingung an der Oberfläche bei Isostasie. Wir wollen nun die Gleichgewichtsbedingungen einführen. Die Flächen gleicher Dichte, die also durch (1·5) bei festem a gegeben sind, sollen Niveauflächen oder Flächen gleichen Potentials sein, ebenso die Oberfläche des Sphäroids, d. h. wir setzen Isostasie im Innern des Sphäroids voraus. Auf einen

[1]) R. WAVRE, Figures planétaires et géodésie, Paris 1932, Gauthier-Villars et Cie., Kap. 4.

Punkt der Oberfläche (Masse 1) wirkt die Anziehung des gesamten Sphäroids mit dem Potential $k^2 V_a$ (k^2 Gravitationskonstante) und die Fliehkraft. Diese ist gegeben durch $\omega^2 r_0 \sin\vartheta$. Ihre Komponenten parallel zu den drei Koordinatenachsen sind also

$$\omega^2 r_0 \sin\vartheta \cos\varphi = \omega^2 x, \quad \omega^2 r_0 \sin\vartheta \sin\varphi = \omega^2 y, \quad 0.$$

Sie läßt sich infolgedessen als Gradient des Potentials

$$\frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) = \frac{\omega^2}{2} r_0^2 \sin^2\vartheta$$

darstellen. Die Gleichgewichtsbedingung für die Oberfläche lautet somit

(1) $$k^2 V_a + \frac{\omega^2}{2} r_0^2 \sin^2\vartheta = \text{const}$$

oder mit Hilfe von (2·1), weil

$$\sin^2\vartheta = \frac{2}{3}[1 - P_2(\cos\vartheta)]$$

ist,

$$\frac{4\pi k^2}{r_0}\int_0^{a_0} \varrho a^2 da - \frac{8\pi k^2 \varepsilon}{15 r_0^3} P_2(\cos\vartheta) \int_0^{a_0} \varrho \frac{\partial(u a^5)}{\partial a} da$$
$$+ \frac{\omega^2}{3} r_0^2 [1 - P_2(\cos\vartheta)] = \text{const}$$

Berücksichtigen wir noch (1·4) und setzen ω^2 von der Ordnung ε voraus, so folgt, wenn α die Abplattung an der Oberfläche bedeutet,

(2) $$\frac{4\pi k^2}{a_0}\left[1 + \frac{2}{3}\alpha P_2(\cos\vartheta)\right]\int_0^{a_0} \varrho a^2 da$$
$$- \frac{8\pi k^2 \varepsilon}{15 a_0^3} P_2(\cos\vartheta)\int_0^{a_0} \varrho \frac{\partial(u a^5)}{\partial a} da + \frac{\omega^2}{3} a_0^2 [1 - P_2(\cos\vartheta)] = \text{const}$$

Für das Folgende ist es günstig, das Verhältnis λ von Fliehkraft und Anziehungskraft am Äquator einzuführen. Dabei genügt es, für die Anziehungskraft

$$-k^2\left(\frac{\partial V_a}{\partial r}\right)_{a=a_0} = \frac{4\pi k^2}{a_0^2}\int_0^{a_0} \varrho a^2 da$$

zu nehmen, so daß man

(3) $$\lambda = \frac{\omega^2 a_0^3}{4\pi k^2 \int_0^{a_0} \varrho a^2 da}$$

und schließlich für die Gleichgewichtsbedingung (1) und (2)

$$\frac{4\pi k^2}{a_0}\left[1+\frac{2}{3}\alpha P_2(\cos\vartheta)\right]\int\limits_0^{a_0}\varrho a^2 da-\frac{8\pi k^2\varepsilon}{15a_0^3}P_2(\cos\vartheta)\int\limits_0^{a_0}\varrho\frac{\partial(ua^5)}{\partial a}da$$

$$+\frac{4\pi k^2\lambda}{3a_0}[1-P_2(\cos\vartheta)]\int\limits_0^{a_0}\varrho a^2 da=\text{const}$$

erhält. Da die Entwicklung nach Kugelfunktionen eindeutig ist, muß der Koeffizient von P_2 Null sein, d. h. es wird

(4) $$\frac{\varepsilon}{5a_0^2}\int\limits_0^{a_0}\varrho\frac{\partial(ua^5)}{\partial a}da=\left(\alpha-\frac{\lambda}{2}\right)\int\limits_0^{a_0}\varrho a^2 da.$$

4. Schwerebeschleunigung auf dem rotierenden Sphäroid. Wir wollen nun die Schwerkraft auf der Oberfläche des Sphäroids berechnen. Sie setzt sich zusammen aus den zur Oberfläche senkrechten Komponenten der Anziehungskraft und der Fliehkraft. Da das Sphäroid wenig von der Kugel abweicht, ist der Winkel zwischen Radiusvektor und Flächennormale von der Ordnung α, sein Kosinus weicht daher von 1 nur um Größen von der Ordnung α^2 ab, d. h. wir können die Normalkomponente ersetzen durch die Komponenten längs des Radiusvektors r. Die Fliehkraft ist $\omega^2 r_0 \sin\vartheta$, die gegen den Nullpunkt gerichtete Komponente längs des Radiusvektors daher $-\omega^2 r_0\sin^2\vartheta=-\frac{2}{3}\omega^2 r_0[1-P_2(\cos\vartheta)]$. Für die Schwerebeschleunigung erhalten wir somit

$$g=-k^2\left(\frac{\partial V_a}{\partial r}\right)_{a=a_0}-\frac{2}{3}\omega^2 r_0[1-P_2(\cos\vartheta)]$$

$$=\frac{4\pi k^2}{r_0^2}\int\limits_0^{a_0}\varrho a^2 da-\frac{8\pi k^2\varepsilon}{5r_0^4}P_2(\cos\vartheta)\int\limits_0^{a_0}\varrho\frac{\partial(ua^5)}{\partial a}da$$

$$-\frac{2}{3}\omega^2 r_0[1-P_2(\cos\vartheta)]$$

$$=\frac{4\pi k^2}{a^2}\left[1+\frac{4}{3}\alpha P_2(\cos\vartheta)\right]\int\limits_0^{a_0}\varrho a^2 da$$

$$-\frac{8\pi k^2\varepsilon}{5a_0^4}P_2(\cos\vartheta)\int\limits_0^{a_0}\varrho\frac{\partial(ua^5)}{\partial a}da-\frac{2}{3}\omega^2 a_0[1-P_2(\cos\vartheta)].$$

Nun führen wir λ ein und berücksichtigen (3·3) und (3·4); dann folgt

$$g = \frac{4\pi k^2}{a_0^2}\left[1 + \frac{4}{3}\alpha P_2(\cos\vartheta)\right]\int_0^{a_0} \varrho a^2\, da - \frac{8\pi k^2 \varepsilon}{5 a_0^4} P_2(\cos\vartheta)\int_0^{a_0} \varrho \frac{\partial(u a^5)}{\partial a}\, da$$

$$- \frac{8\pi k^2 \lambda}{3 a_0^2}[1 - P_2(\cos\vartheta)]\int_0^{a_0} \varrho a^2\, da$$

$$= \frac{4\pi k^2}{a_0^2}\left[1 - \frac{2}{3}\lambda + \left(\frac{4}{3}\alpha + \frac{2}{3}\lambda\right) P_2(\cos\vartheta)\right]\int_0^{a_0} \varrho a^2 da$$

$$- \frac{8\pi k^2 \varepsilon}{5 a_0^4} P_2(\cos\vartheta)\int_0^{a_0} \varrho \frac{\partial(u a^5)}{\partial a}\, da$$

$$= \frac{4\pi k^2}{a_0^2}\left[1 - \frac{2}{3}\lambda + \frac{5\lambda - 2\alpha}{3} P_2(\cos\vartheta)\right]\int_0^{a_0} \varrho a^2\, da.$$

Wir erhalten daher für die Schwerebeschleunigung am Nordpol ($\vartheta = 0$):

$$g_1 = \frac{4\pi k^2}{a_0^2}\left(1 + \lambda - \frac{2}{3}\alpha\right)\int_0^{a_0} \varrho a^2 da,$$

am Äquator $\left(\vartheta = \frac{\pi}{2}\right)$:

$$g_2 = \frac{4\pi k^2}{a_0^2}\left(1 - \frac{3}{2}\lambda + \frac{1}{3}\alpha\right)\int_0^{a_0} \varrho a^2 da,$$

infolgedessen

$$\gamma = \frac{g_1 - g_2}{g_2} = \frac{5}{2}\lambda - \alpha.$$

Dies ist der berühmte Satz von CLAIRAUT[1]), der aussagt, daß γ nicht von dem Gesetz abhängt, nach dem sich die Dichte im Innern des Sphäroids von Schicht zu Schicht ändert.

Nach HELMERT (Potsdam) ist für die Erde

$$\gamma = 0{,}005302, \quad \lambda = \frac{1}{288} = 0{,}003469, \quad \frac{5}{2}\lambda = 0{,}008672,$$

also $\alpha = 0{,}003370 = \frac{1}{297}$. Nach HAYFORD gilt gegenwärtig dies als bester Wert.

5. Trägheitsmomente des Sphäroids. Wir wollen noch die Bedeutung der beiden in (3·4) auftretenden Integrale kennenlernen. Wir berechnen

---

[1]) A. C. CLAIRAUT, Théorie de la figure de la terre, tirée des principes de l'hydrostatique, Paris 1743, oder Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 189, Leipzig 1913 (im folgenden mit CO bezeichnet), S. 118.

die Masse des Sphäroids

$$(1)\qquad M=\int \varrho\, d\tau=\int d\sigma \int_0^{r_0} \varrho r^2 dr=\int d\sigma \int_0^{a_0} \varrho r^2 \frac{\partial r}{\partial a} da$$

$$=\frac{1}{3}\int d\sigma \int_0^{a_0} \varrho \frac{\partial r^3}{\partial a} da=\frac{1}{3}\int d\sigma \int_0^{a_0} \varrho \frac{\partial}{\partial a}\{a^3[1-2\varepsilon u P_2(\cos\vartheta)]\} da$$

$$=4\pi \int_0^{a_0} \varrho a^2 da\,.$$

Diese Formeln sind so zu verstehen: Das erste Integral ist über das ganze Sphäroid zu erstrecken, in den übrigen ist die Integration bezüglich $d\sigma$ über die Fläche der Einheitskugel zu erstrecken, d. h. $\int d\sigma$ ist Abkürzung für $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\vartheta\, d\vartheta$. Dabei wird noch (I·49) benützt.

Berechnen wir nun die Trägheitsmomente des Sphäroids bezüglich der drei Achsen des Koordinatensystems. Es ergibt sich mit derselben Bedeutung wie früher

$$\Theta_x=\int \varrho(y^2+z^2)\, d\tau,$$
$$\Theta_y=\int \varrho(z^2+x^2)\, d\tau,$$
$$\Theta_z=\int \varrho(x^2+y^2)\, d\tau,$$
$$\Theta_x+\Theta_y+\Theta_z=2\int \varrho(x^2+y^2+z^2)\, d\tau=2\int d\sigma \int_0^{r_0} \varrho r^4 dr,$$
$$\Theta_x+\Theta_y-\Theta_z=2\int d\sigma \int_0^{r_0} \varrho r^2 z^2 dr.$$

Wegen der Drehsymmetrie des Sphäroids bezüglich der Drehachse (Z-Achse) ist $\Theta_x=\Theta_y$, daher

$$\Theta_x=\frac{1}{2}\int d\sigma \int_0^{r_0} \varrho r^2(r^2+z^2)\, dr,$$

$$\Theta_z=\int d\sigma \int_0^{r_0} \varrho r^2(r^2-z^2)\, dr.$$

Nun ist nach Ziffer 1

$$z^2=r^2\cos^2\vartheta=\frac{r^2}{3}[1+2P_2(\cos\vartheta)],$$

somit

$$\int_0^{r_0} \varrho r^2 z^2 dr=\frac{1}{3}(1+2P_2)\int_0^{r_0} \varrho r^4 dr$$

und

$$\int\limits_0^{r_0} \varrho\, r^4\, dr = \int\limits_0^{a_0} \varrho\, r^4 \frac{\partial r}{\partial a}\, da = \frac{1}{5}\int\limits_0^{a_0} \varrho \frac{\partial r^5}{\partial a}\, da = \frac{1}{5}\int\limits_0^{a_0} \varrho \frac{\partial}{\partial a}\left[a^5\left(1 - \frac{10}{3}\varepsilon\, u\, P_2\right)\right] da,$$

daher nach (I·49)

$$\int d\sigma \int\limits_0^{r_0} \varrho\, r^4\, dr = 4\pi \int\limits_0^{a_0} \varrho\, a^4\, da,$$

$$\int P_2\, d\sigma \int\limits_0^{r_0} \varrho\, r^4\, dr = -\frac{2}{3}\varepsilon \int P_2^2\, d\sigma \int\limits_0^{a_0} \varrho \frac{\partial (u\, a^5)}{\partial a}\, da$$

und nach (I·21·1)

$$\int P_2^2\, d\sigma = \frac{4\pi}{5},$$

demnach

$$\Theta_x = \frac{1}{3}\int (2 + P_2)\, d\sigma \int\limits_0^{r_0} \varrho\, r^4\, dr = \frac{8\pi}{3}\int\limits_0^{a_0} \varrho\, a^4\, da - \frac{8\pi\varepsilon}{45}\int\limits_0^{a_0} \varrho \frac{\partial (u\, a^5)}{\partial a}\, da,$$

$$\Theta_z = \frac{2}{3}\int (1 - P_2)\, d\sigma \int\limits_0^{r_0} \varrho\, r^4\, dr = \frac{8\pi}{3}\int\limits_0^{a_0} \varrho\, a^4\, da + \frac{16\pi\varepsilon}{45}\int\limits_0^{a_0} \varrho \frac{\partial (u\, a^5)}{\partial a}\, da,$$

$$\Theta_z - \Theta_x = \frac{8\pi\varepsilon}{15}\int\limits_0^{a_0} \varrho \frac{\partial (u\, a^5)}{\partial a}\, da,$$

somit nach (1) und (3·4)

$$\Theta_z - \Theta_x = \frac{2}{3}\left(\alpha - \frac{\lambda}{2}\right) a_0^2 M,$$

d. h. auch der Unterschied der beiden Hauptträgheitsmomente ist von dem Dichtegesetz im Innern unabhängig (Satz von Stokes[1]).

6. Potential eines Sphäroids in einem inneren Punkt. Ähnlich wie in Ziffer 2 wollen wir jetzt das Potential des Sphäroids für einen inneren Punkt P berechnen. Wir denken uns eine sphäroidische Schale, d. h. wir nehmen an, der Körper bestehe aus allen Schichten, die man aus (1·5) erhält, wenn man a auf das Intervall $0 < a_1 \leq a \leq a_0$ beschränkt. Die

---

[1]) G. G. Stokes, Transactions of the Cambridge Philosophical Society 8 (1849) 672 oder Mathematical and Physical Papers, Bd. 2, S. 131—171, insbesondere S. 144.

a_0 und a_1 entsprechenden Werte des Radiusvektors seien r_0 und r_1. r, ϑ, φ seien die Kugelkoordinaten des Aufpunktes P, r', ϑ', φ' diejenigen eines Punktes P' des schalenförmigen Körpers; ferner sei $r < r'$ für alle P'. Dann ist nach (I·10)

$$\frac{1}{\overline{PP'}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n(\cos\gamma)\, r^n}{r'^{\,n+1}},$$

somit das Potential der Schale, wobei das Integral bezüglich $d\sigma'$ über die Einheitskugel zu erstrecken ist,

$$(1) \qquad V = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \int d\sigma' \int_{r_1}^{r_0} \varrho \frac{P_n(\cos\gamma)}{r'^{\,n+1}} r'^2 dr'$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} r^n \int P_n(\cos\gamma)\, d\sigma' \int_{a_1}^{a_0} \varrho r'^{\,1-n} \frac{\partial r'}{\partial a} da$$

$$= \sum_{\substack{n=0\\ n\neq 2}}^{\infty} \frac{r^n}{2-n} \int P_n(\cos\gamma)\, d\sigma' \int_{a_1}^{a_0} \varrho \frac{\partial r'^{\,2-n}}{\partial a} da$$

$$+ r^2 \int P_2(\cos\gamma)\, d\sigma' \int_{a_1}^{a_0} \varrho \frac{\partial \ln r'}{\partial a} da$$

$$= \sum_{\substack{n=0\\ n\neq 2}}^{\infty} \frac{r^n}{2-n} \int P_n(\cos\gamma)\, d\sigma' \int_{a_1}^{a_0} \varrho \frac{\partial}{\partial a} \left\{ a^{2-n} \left[1 - \frac{2}{3}(2-n)\varepsilon u P_2(\cos\vartheta') \right] \right\} da$$

$$+ r^2 \int P_2(\cos\gamma)\, d\sigma' \int_{a_1}^{a_0} \varrho \frac{\partial}{\partial a} \left[\ln a - \frac{2}{3} \varepsilon u P_2(\cos\vartheta') \right] da$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 4\pi \int_{a_1}^{a_0} \varrho \frac{\partial a^2}{\partial a} da - \frac{2}{3} \varepsilon r^2 \cdot \frac{4\pi}{5} P_2(\cos\vartheta) \int_{a_1}^{a_0} \varrho \frac{\partial u}{\partial a} da$$

$$= 4\pi \int_{a_1}^{a_0} \varrho a\, da - \frac{8\pi}{15} \varepsilon r^2 P_2(\cos\vartheta) \int_{a_1}^{a_0} \varrho \frac{\partial u}{\partial a} da .$$

Wieder wurde (I·49) benützt.

Ähnlich wie in Ziffer 2 verwenden wir die erhaltene Formel auch für Punkte auf der inneren Begrenzungsfläche der Schale. Die dort gemachte Bemerkung über die Ordnung des vernachlässigten Teils gilt auch hier.

Für einen im Innern des Sphäroids liegenden Punkt setzt sich also das Potential aus zwei Teilen zusammen. Sei nämlich jetzt a_1 jener Wert

von a, welcher derjenigen Niveaufläche entspricht, auf welcher der Punkt P liegt. Für alle Niveauflächen mit kleinerem a ist P äußerer Punkt, sie liefern daher zum Potential einen Beitrag V_1, den man erhält, wenn man a_1 statt a_0 und r statt r_0 in der Formel (2·1) für V_a nimmt, also

$$V_1 = \frac{4\pi}{r}\int_0^{a_1} \varrho\, a^2\, da - \frac{8\pi\varepsilon}{15\, r^3} P_2(\cos\vartheta) \int_0^{a_1} \varrho \frac{\partial(u\, a^5)}{\partial a}\, da.$$

Für die Niveauflächen mit größerem a ist P innerer Punkt. Sie liefern somit zum Potential einen Beitrag V_2, der durch die Formel (1) gegeben wird, d. h.

$$V_2 = 4\pi \int_{a_1}^{a_0} \varrho\, a\, da - \frac{8\pi}{15}\varepsilon\, r^2 P_2(\cos\vartheta) \int_{a_1}^{a_0} \varrho \frac{\partial u}{\partial a}\, da.$$

Das gesamte Potential im inneren Punkt P ist daher

$$V_i = \frac{4\pi}{r}\int_0^{a_1} \varrho\, a^2\, da + 4\pi \int_{a_1}^{a_0} \varrho\, a\, da$$

$$- \frac{8\pi\varepsilon}{15} P_2(\cos\vartheta) \left[\frac{1}{r^3}\int_0^{a_1} \varrho \frac{\partial(u\, a^5)}{\partial a}\, da + r^2 \int_{a_1}^{a_0} \varrho \frac{\partial u}{\partial a}\, da\right].$$

7. Gleichgewichtsbedingung im Innern bei Isostasie. Nun bedenken wir, daß die durch die einzelnen Werte von a gekennzeichneten Flächen als Niveauflächen vorausgesetzt wurden, d. h. für jede von ihnen gilt die Gleichgewichtsbedingung (3·1), wobei aber jetzt V_i an Stelle von V_a und

$$r = a_1\left[1 - \frac{2}{3}\varepsilon\, u\, P_2(\cos\vartheta)\right]$$

statt r_0 zu setzen ist. Dann wird

$$V_i = \frac{4\pi}{a_1}\int_0^{a_1} \varrho\, a^2\, da + 4\pi \int_{a_1}^{a_0} \varrho\, a\, da$$

$$+ \frac{8\pi\varepsilon}{3\, a_1} u(a_1)\, P_2(\cos\vartheta) \int_0^{a_1} \varrho\, a^2\, da$$

$$- \frac{8\pi\varepsilon}{15} P_2(\cos\vartheta) \left[\frac{1}{a_1^3}\int_0^{a_1} \varrho \frac{\partial(u\, a^5)}{\partial a}\, da + a_1^2 \int_{a_1}^{a_0} \varrho \frac{\partial u}{\partial a}\, da\right],$$

also die Gleichgewichtsbedingung

$$\frac{4\pi k^2}{a_1}\int_0^{a_1}\varrho\, a^2\, da + 4\pi k^2 \int_{a_1}^{a_0}\varrho\, a\, da$$

$$+\frac{8\pi k^2 \varepsilon}{3 a_1} u(a_1)\, P_2(\cos\vartheta)\int_0^{a_1}\varrho\, a^2\, da$$

$$-\frac{8\pi k^2\varepsilon}{15} P_2(\cos\vartheta)\left[\frac{1}{a_1^3}\int_0^{a_1}\varrho\frac{\partial(u\, a^5)}{\partial a}da + a_1^2\int_{a_1}^{a_0}\varrho\frac{\partial u}{\partial a}da\right]$$

$$+\frac{\omega^2}{3}a_1^2[1 - P_2(\cos\vartheta)] = \text{const.}$$

Der Koeffizient von $P_2(\cos\vartheta)$ muß Null sein, daher

$$5\, u(a_1)\, a_1^2\int_0^{a_1}\varrho\, a^2\, da - \int_0^{a_1}\varrho\frac{\partial(u\, a^5)}{\partial a}da - a_1^5\int_{a_1}^{a_0}\varrho\frac{\partial u}{\partial a}da - \frac{5\,\omega^2 a_1^5}{8\pi k^2\varepsilon} = 0.$$

Diese Beziehung gilt für alle a zwischen 0 und a_0. Wir können sie daher nach a_1 differenzieren und erhalten

$$(5\, u'\, a_1^2 + 10\, u\, a_1)\int_0^{a_1}\varrho\, a^2\, da + 5\,\varrho\, u\, a_1^4 - 5\,\varrho\, u\, a_1^4$$

$$-\varrho\, u'\, a_1^5 - 5\, a_1^4\int_{a_1}^{a_0}\varrho\frac{\partial u}{\partial a}da + a_1^5\,\varrho\, u' - \frac{25\,\omega^2}{8\pi k^2\varepsilon}a_1^4 = 0.$$

Dabei haben wir statt $u(a_1)$ und $\frac{du(a_1)}{da_1}$ kurz u und u' geschrieben. Die Gleichung lautet auch

$$\text{(1)}\qquad \left(\frac{u'}{a_1^2}+\frac{2u}{a_1^3}\right)\int_0^{a_1}\varrho\, a^2\, da - \int_{a_1}^{a_0}\varrho\frac{\partial u}{\partial a}da - \frac{5\,\omega^2}{8\pi k^2\varepsilon} = 0.$$

Wir differenzieren diese Gleichung nochmals nach a_1. Dann folgt

$$\left(\frac{u''}{a_1^2} - \frac{2u'}{a_1^3} + \frac{2u'}{a_1^3} - \frac{6u}{a_1^4}\right)\int_0^{a_1}\varrho\, a^2\, da + \varrho\, u' + \frac{2\varrho\, u}{a_1} + \varrho\, u' = 0.$$

Nach den Überlegungen von Ziffer 5 bedeutet $4\pi\int_0^{a_1}\varrho\, a^2\, da$ die Masse des Sphäroids, das von der zu a_1 gehörigen Fläche begrenzt ist. Wir setzen zur Abkürzung $\int_0^{a_1}\varrho\, a^2\, da = \mu$; μ ist natürlich eine Funktion von a_1.

Damit können wir die letzte Gleichung in folgender Gestalt schreiben (wir lassen dabei den Zeiger 1 weg, da sie ja für alle Werte von a zwischen 0 und a_0 gilt):

$$u''\mu - \frac{6u\mu}{a^2} + 2\varrho u' a^2 + 2\varrho u a = 0$$

oder

(2) $$u'' + 2u'\frac{\varrho a^2}{\mu} + 2u\left(\frac{\varrho a}{\mu} - \frac{3}{a^2}\right) = 0.$$

Das ist die Differentialgleichung von CLAIRAUT[1]). Da u bis auf den festen Faktor ε die Abplattung der zu a gehörigen Fläche bedeutet, liefert die Gleichung die Abplattung der Niveauflächen im Innern als Funktion von a, wenn die Dichte als Funktion von a gegeben ist.

Aus (1) erhalten wir für die Oberfläche des Sphäroids ($a_1 = a_0$)

$$\left(\frac{u'}{a_0^2} + \frac{2u}{a_0^3}\right)\int\limits_0^{a_0} \varrho a^2 da = \frac{5\omega^2}{8\pi k^2 \varepsilon}$$

oder, wenn wir (3·3) berücksichtigen und bedenken, daß an der Oberfläche $\varepsilon u = \alpha$ ist,

(3) $$a_0 \alpha' + 2\alpha = \frac{5}{2}\lambda .$$

Wir wollen zwei besonders wichtige Fälle betrachten. Zuerst sei die Dichte konstant, also

$$\mu = \frac{\varrho a^3}{3}.$$

Die Differentialgleichung (2) lautet in diesem Fall

$$u'' + \frac{6u'}{a} = 0.$$

Machen wir den Ansatz $u = c\,a^m$, so erhalten wir für m die Werte 0 und -5. Der zweite kommt nicht in Frage, weil wir dann unendlich große Abplattung im Punkt O hätten, der erste liefert als Lösung $u = c$, somit an der Oberfläche $\alpha = \frac{5}{4}\lambda$ nach (3). Dieser Wert war schon NEWTON[2]) bekannt.

Dann sei die Gesamtmasse im Punkt O vereinigt, also sonst überall $\varrho = 0$ und $\mu = \frac{M}{4\pi}$. Die Differentialgleichung lautet jetzt

$$u'' - \frac{6u}{a^2} = 0,$$

---

[1]) CO, S. 128. [2]) CO, S. 91.

der Ansatz $u = c\,a^m$ liefert für m die Werte 3 und -2. Der zweite kommt nicht in Frage wie im ersten Fall, der erste liefert die Lösung $u = ca^3$, daher $u' = 3\,ca^2$, also an der Oberfläche

$$a_0 u' = 3\,c\,a_0^3 = 3\,u$$

oder

$$a_0 u' + 2\,u = 5\,u,$$

somit

$$\varepsilon(a_0 u' + 2\,u) = a_0 \alpha' + 2\,\alpha = 5\,\varepsilon\,u = 5\,\alpha,$$

infolgedessen $\alpha = \frac{\lambda}{2}$ nach (3). Diesen Wert kannte schon HUYGHENS.

§ 2. Erdmagnetismus, Entwicklung einer durch Beobachtungen gegebenen Funktion nach Kugelfunktionen.

8. Magnetische Massen innerhalb der Erde. Als zweite Anwendung wollen wir die GAUSSschen Untersuchungen über den Erdmagnetismus behandeln. Durch diese Untersuchungen wurde GAUSS[1]) dazu gebracht, sich mit den Kugelfunktionen zu beschäftigen. Die auf die positive magnetische Masseneinheit wirkende Kraft zerlegen wir in drei Komponenten X, Y, Z; X waagrecht zur Erdoberfläche in der Richtung des Meridians (Nord-Süd, wachsendes ϑ), Y waagrecht in der Richtung des Parallelkreises (West-Ost, wachsendes φ), Z senkrecht in der Richtung des Lotes (nach oben, wachsendes r). Den Nullpunkt des Koordinatensystems legen wir in den Erdmittelpunkt. Die Z-Achse gehe durch den Nordpol der Erde. a sei der Halbmesser der Erde, die wir im folgenden als Kugel voraussetzen wollen. Die Kugelkoordinaten des Aufpunktes P seien r, ϑ, φ, die eines Punktes P' mit der magnetischen Masse m' seien r', ϑ', φ', der Winkel POP' sei γ.

Wir nehmen an, daß die magnetischen Massen irgendwie im Erdinnern verteilt sind und betrachten ihre Wirkung auf Punkte auf und oberhalb der Erde, d. h. wir setzen $r' \leqq a \leqq r$ voraus. Wie in Ziffer 2 ergibt sich

$$\frac{1}{\overline{PP'}} = \frac{1}{r} + \frac{r' P_1(\cos\gamma)}{r^2} + \frac{r'^2 P_2(\cos\gamma)}{r^3} + \cdots,$$

daher das Potential sämtlicher magnetischen Massen zu

$$V = \sum \frac{m'}{\overline{PP'}} = \frac{\Sigma\, m' r' P_1(\cos\gamma)}{r^2} + \frac{\Sigma\, m' r'^2 P_2(\cos\gamma)}{r^3} + \cdots$$

---

[1]) C. F. GAUSS, Allgemeine Theorie des Erdmagnetismus 1838 (Werke Bd. 5).

Denn da zu jeder positiven magnetischen Masse die gleiche negative vorhanden ist, wird $\Sigma m' = 0$. Die Zähler der einzelnen Glieder sind als Funktionen des Aufpunktes Kugelflächenfunktionen, wir können sie also in der Gestalt

$$\Sigma m' r'^n P_n(\cos\gamma) = a^{n+2} S_n(\vartheta, \varphi)$$

ansetzen, so daß wir

$$V = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n+2}}{r^{n+1}} S_n(\vartheta, \varphi)$$

erhalten.

Für die drei Komponenten der Kraft hat man nach (I·4)

$$(1)\qquad \begin{cases} X = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \vartheta}, \\ Y = -\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial V}{\partial \varphi}, \\ Z = -\frac{\partial V}{\partial r}, \end{cases}$$

wobei nach der Differentiation $r = a$ zu setzen ist, wenn wir den Aufpunkt P auf der Oberfläche annehmen. Es folgt daraus

$$\begin{cases} X = -\frac{\partial}{\partial \vartheta} \sum_{n=1}^{\infty} S_n(\vartheta, \varphi), \\ Y = -\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial \varphi} \sum_{n=1}^{\infty} S_n(\vartheta, \varphi), \\ Z = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)\, S_n(\vartheta, \varphi). \end{cases}$$

Die waagrechte Komponente der erdmagnetischen Kraft ist durch

$$H = \sqrt{X^2 + Y^2}, \quad (X = H\cos\delta,\ Y = H\sin\delta),$$

die Deklination also durch

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{Y}{X},$$

die Inklination durch

$$\operatorname{tg} j = \frac{Z}{H}$$

gegeben. Ist Z bekannt, dann auch seine Entwicklung nach Kugelfunktionen, d. h. es sind alle $S_n(\vartheta, \varphi)$ bekannt, somit auch X und Y.

Ist X bekannt, dann auch

$$\int_{\vartheta}^{\pi} X\, d\vartheta = \sum_{n=1}^{\infty} S_n(\vartheta, \varphi) - \sum_{n=1}^{\infty} S_n(\pi).$$

Die zweite Summe dieser Formel ist von φ unabhängig, weil die Kugelfunktionen im Pol $\vartheta = \pi$ von φ nicht mehr abhängen, diese Summe ist also eine Konstante. Die Kenntnis von X liefert infolgedessen ebenfalls die $S_n(\vartheta, \varphi)$ und damit Z und Y.

Ist schließlich Y bekannt, so bilden wir

$$-\sin\vartheta \int_0^\varphi Y\, d\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} S_n(\vartheta, \varphi) - \sum_{n=1}^{\infty} S_n(\vartheta, 0),$$

daher wird

$$X = \frac{\partial}{\partial\vartheta}\left[\sin\vartheta \int_0^\varphi Y\, d\varphi - \sum_{n=1}^{\infty} S_n(\vartheta, 0)\right],$$

also

$$X(\vartheta, \varphi) - X(\vartheta, \varphi_0) = \frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta \int_{\varphi_0}^{\varphi} Y\, d\varphi\right).$$

Kennt man daher Y und auf einem bestimmten Meridian φ_0 auch noch X, so ist damit X und nach dem Früheren auch Z bekannt.

Aus den Gleichungen (1) ergibt sich weiter

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial\vartheta} = -rX, \\ \dfrac{\partial V}{\partial\varphi} = -r\sin\vartheta\, Y, \\ \dfrac{\partial V}{\partial r} = -Z. \end{cases}$$

Ferner ist außerhalb der Erde $\Delta V = 0$, also nach (I, 4·2)

$$(3)\qquad \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial V}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2} = 0.$$

Aus (2) erhält man

$$(4)\qquad \frac{\partial(rX)}{\partial r} = \frac{\partial Z}{\partial\vartheta} \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial r}(r\sin\vartheta\, Y) = \frac{\partial Z}{\partial\varphi},$$

aus (2) und (3)

$$(5)\qquad \frac{\partial}{\partial r}(r^2 Z) + \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}(r\sin\vartheta X) + \frac{r}{\sin\vartheta}\frac{\partial Y}{\partial\varphi} = 0,$$

ferner aus (4) und (5)

$$X + r\frac{\partial X}{\partial r} = \frac{\partial Z}{\partial\vartheta},$$

$$Y + r\frac{\partial Y}{\partial r} = \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial Z}{\partial\varphi},$$

$$2rZ + r^2\frac{\partial Z}{\partial r} = -\frac{r}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}(X\sin\vartheta) - \frac{r}{\sin\vartheta}\frac{\partial Y}{\partial\varphi}$$

oder

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial X}{\partial r} = -\dfrac{X}{r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial Z}{\partial \vartheta}, \\ \dfrac{\partial Y}{\partial r} = -\dfrac{Y}{r} + \dfrac{1}{r\sin\vartheta}\dfrac{\partial Z}{\partial \varphi}, \\ \dfrac{\partial Z}{\partial r} = -\dfrac{2Z}{r} - \dfrac{1}{r\sin\vartheta}\dfrac{\partial}{\partial \vartheta}(X\sin\vartheta) - \dfrac{1}{r\sin\vartheta}\dfrac{\partial Y}{\partial \varphi}. \end{cases}$$

Sind also H, δ, j oder die Kraftkomponenten X, Y, Z in einem Gebiet der Erdoberfläche bekannt, und daher auch ihre Ableitungen nach ϑ und φ, so kann man aus den Formeln (6) die Ableitungen der Komponenten nach r berechnen, also die Änderung von H, δ, j mit der Erhebung über der Erdoberfläche bestimmen und damit die magnetische Wirkung von Gebirgsmassen studieren.

Kennt man nämlich die Kraftkomponenten in weiter Entfernung vom Gebirge, also unbeeinflußt durch dieses, so kann man ihre Werte im Gebirgsraum durch Interpolation bestimmen und kennt somit die von der Gebirgswirkung freien Werte im Gebirgsraum auf der Erdoberfläche. Aus diesen ergeben sich nach (6) die von der Gebirgswirkung freien Werte auf der Gebirgshöhe. Vergleicht man diese so gerechneten Werte mit den auf der Gebirgshöhe tatsächlich beobachteten, so ist dadurch die Einwirkung des Gebirges festgestellt.

9. Magnetische Massen außerhalb der Erde. In diesem Fall ist $r \leqq a \leqq r'$, somit

$$\frac{1}{\overline{PP'}} = \frac{1}{r'} + \frac{r\,P_1(\cos\gamma)}{r'^2} + \frac{r^2\,P_2(\cos\gamma)}{r'^3} + \cdots,$$

$$V = \sum \frac{m'}{\overline{PP'}} = \sum \frac{m'}{r'} + r\sum \frac{m'\,P_1(\cos\gamma)}{r'^2} + r^2 \sum \frac{m'\,P_2(\cos\gamma)}{r'^3} + \cdots$$

Die Kugelflächenfunktion $\sum \frac{m'\,P_n(\cos\gamma)}{r'^{n+1}}$ schreiben wir in der Gestalt $\frac{T_n(\vartheta,\varphi)}{a^{n-1}}$, somit wird

$$V = \text{const} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n\,T_n(\vartheta,\varphi)}{a^{n-1}},$$

und für die Oberfläche $(r = a)$ nach (8·1)

$$(1)\quad \begin{cases} X = -\dfrac{\partial}{\partial\vartheta}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} T_n(\vartheta,\varphi), \\ Y = -\dfrac{1}{\sin\vartheta}\dfrac{\partial}{\partial\varphi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} T_n(\vartheta,\varphi), \\ Z = -\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\,T_n(\vartheta,\varphi). \end{cases}$$

Die Formeln für X und Y sind dieselben wie in Ziffer 8, erst bei Z ist ein Unterschied. Ebenso erhält man wie in Ziffer 8

$$\int_{\vartheta}^{\pi} X\,d\vartheta = \text{const} + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(\vartheta, \varphi)$$

und auch für $\int_0^{\varphi} Y\,d\varphi$ dieselbe Formel wie in Ziffer 8. Die Entscheidung darüber, ob der Sitz der magnetischen Massen innerhalb oder außerhalb der Erde sei, wird infolgedessen durch die Kenntnis der Komponente Z gefällt.

Wir wollen jetzt noch den Fall betrachten, daß die magnetischen Massen ihren Sitz teils innerhalb, teils außerhalb der Erde haben, d. h. wir haben für das Potential eine Entwicklung von der Gestalt

$$V = \text{const} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n+2}}{r^{n+1}} S_n(\vartheta, \varphi) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{a^{n-1}} T_n(\vartheta, \varphi),$$

daher

$$X = -\frac{\partial}{\partial\vartheta} \sum_{n=1}^{\infty} [S_n(\vartheta, \varphi) + T_n(\vartheta, \varphi)],$$

$$\int_{\vartheta}^{\pi} X\,d\vartheta = \text{const} + \sum_{n=1}^{\infty} [S_n(\vartheta, \varphi) + T_n(\vartheta, \varphi)],$$

$$Z = \sum_{n=1}^{\infty} [(n+1)\,S_n(\vartheta, \varphi) - n\,T_n(\vartheta, \varphi)].$$

Kennt man also X und Z und daher auch ihre Entwicklungen nach Kugelfunktionen, so sind $S_n + T_n$ und $(n+1)\,S_n - n\,T_n$ für alle n bekannt, woraus sich alle S_n und T_n berechnen lassen. Die GAUSS zur Verfügung stehenden Beobachtungen reichten zur Entscheidung nicht aus.

Da es sich in den Reihen der Ziffern 8 und 9 um Entwicklungen von Funktionen handelt, die durch Beobachtungen gegeben sind, wird man von diesen Reihen immer nur eine endliche Anzahl von Gliedern berechnen können; es erübrigt sich also jede Konvergenzbetrachtung.

10. Entwicklung einer durch Beobachtungen gegebenen Funktion nach Laplaceschen Kugelfunktionen. Hilfsformeln. In den vorigen Ziffern kam die Aufgabe vor, eine Funktion, deren Werte für bestimmte Stellen der Einheitskugel gegeben sind, in eine Reihe nach LAPLACEschen Kugelfunktionen zu entwickeln, d. h. die Koeffizienten in dieser Entwicklung zu bestimmen. Wir nehmen also an, die Werte von $f(\vartheta, \varphi)$ seien gegeben für

(1) $$\varphi = 0, \frac{\pi}{p}, \frac{2\pi}{p}, \ldots, \frac{(2p-1)\pi}{p} \qquad (p \text{ positiv ganz})$$

und
$$\vartheta = \vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3, \ldots, \vartheta_q.$$
Wir machen den Ansatz

(2)
$$f(\vartheta, \varphi) = \sum_{n=0}^{p} S_n(\vartheta, \varphi)$$
mit
$$S_n(\vartheta, \varphi) = A_{n0} P_n(\cos\vartheta) + \sum_{k=1}^{n} (A_{nk}\cos k\varphi + B_{nk}\sin k\varphi) P_n^k(\cos\vartheta)$$
und stellen uns die Aufgabe, die Koeffizienten A_{nk} und B_{nk} zu bestimmen. Diese Aufgabe wurde von F. NEUMANN[1]) gelöst.

Wir brauchen dazu einige Hilfsformeln. Wie leicht aus der geometrischen Reihe folgt, ist für ganzzahlige h und $p = 1, 2, 3, \ldots$

(3)
$$\sum_{k=0}^{2p-1} e^{k\frac{h\pi i}{p}} = \begin{cases} 2p, & \text{wenn } \frac{h}{2p} \text{ eine ganze Zahl ist,} \\ 0, & \text{wenn } \frac{h}{2p} \text{ keine ganze Zahl ist.} \end{cases}$$
Damit berechnen wir für alle ganzzahligen m und n zwischen 0 und p (Grenzen eingeschlossen)
$$\sum_{k=0}^{2p-1} \cos\left(k\frac{m\pi}{p}\right)\cos\left(k\frac{n\pi}{p}\right)$$
$$= \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{2p-1}\left(e^{\frac{km\pi i}{p}} + e^{-\frac{km\pi i}{p}}\right)\left(e^{\frac{kn\pi i}{p}} + e^{-\frac{kn\pi i}{p}}\right)$$
$$= \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{2p-1}\left[e^{k(m+n)\frac{\pi}{p}i} + e^{k(m-n)\frac{\pi}{p}i} + e^{-k(m-n)\frac{\pi}{p}i} + e^{-k(m+n)\frac{\pi}{p}i}\right]$$
$$= 2p \text{ für } m = n = 0 \text{ oder } m = n = p,$$
$$= p \text{ für } m = n = 1, 2, 3, \ldots, p-1,$$
$$= 0 \text{ für } m \neq n.$$
Ähnlich ergibt sich
$$\sum_{k=0}^{2p-1} \sin\left(k\frac{m\pi}{p}\right)\sin\left(k\frac{n\pi}{p}\right)$$
$$= -\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{2p-1}\left[e^{k(m+n)\frac{\pi}{p}i} - e^{k(m-n)\frac{\pi}{p}i} - e^{-k(m-n)\frac{\pi}{p}i} + e^{-k(m+n)\frac{\pi}{p}i}\right]$$
$$= 0 \text{ für } m = n = 0 \text{ oder } m = n = p,$$
$$= p \text{ für } m = n = 1, 2, 3, \ldots, p-1,$$
$$= 0 \text{ für } m \neq n$$

[1]) F. NEUMANN, Astr. Nachr. 15 (1838) 313, neu abgedruckt Math. Ann., Bd. 14, S. 567, ausführlicher dargestellt in seinen Vorlesungen über die Theorie des Potentials und der Kugelfunktionen, herausgegeben von C. NEUMANN, Leipzig 1887, B. G. Teubner, Kap. 7.

und schließlich

$$\sum_{k=0}^{2p-1} \cos\left(k\frac{m\pi}{p}\right)\sin\left(k\frac{n\pi}{p}\right)$$

$$= \frac{1}{4i}\sum_{k=0}^{2p-1}\left[e^{k(m+n)\frac{\pi}{p}i} - e^{k(m-n)\frac{\pi}{p}i} + e^{-k(m-n)\frac{\pi}{p}i} - e^{-k(m+n)\frac{\pi}{p}i}\right] = 0.$$

Wir stellen die erhaltenen Formeln zusammen:

(4)	$m = n = 0$ oder p	$m = n = 1, 2, \ldots, p-1$	$m \neq n$
$\sum_{k=0}^{2p-1} \cos\left(k\,m\frac{\pi}{p}\right)\cos\left(k\,n\frac{\pi}{p}\right) =$	$2p$	p	0
$\sum_{k=0}^{2p-1} \sin\left(k\,m\frac{\pi}{p}\right)\sin\left(k\,n\frac{\pi}{p}\right) =$	0	p	0
$\sum_{k=0}^{2p-1} \cos\left(k\,m\frac{\pi}{p}\right)\sin\left(k\,n\frac{\pi}{p}\right) =$	0	0	$0.$

11. Berechnung der Koeffizienten. Wir denken uns nun die Reihe in (10·2) nach den $\cos k\varphi$ und $\sin k\varphi$ geordnet. Dann folgt

$$f(\vartheta, \varphi) = \sum_{k=0}^{p} (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi); \tag{1}$$

dabei sind die a_k und b_k noch Funktionen von ϑ. Setzen wir für ϑ die in (10·1) angegebenen Werte ϑ_λ in die a_k und b_k ein, so wollen wir dafür $a_{k\lambda}$ und $b_{k\lambda}$ schreiben. Damit ergeben sich die Gleichungen

$$f\left(\vartheta_\lambda, \frac{\mu\pi}{p}\right) = \sum_{k=0}^{p}\left(a_{k\lambda}\cos k\frac{\mu\pi}{p} + b_{k\lambda}\sin k\frac{\mu\pi}{p}\right)$$

$$(\lambda = 1, 2, \ldots, q;\ \mu = 0, 1, 2, \ldots, 2p-1).$$

Wir multiplizieren diese Gleichungen mit $\cos\frac{r\mu\pi}{p}$ bzw. $\sin\frac{r\mu\pi}{p}$ (r positive, ganze Zahl zwischen 0 und p, Grenzen eingeschlossen) und erhalten nach (10·4)

$$\sum_{\mu=0}^{2p-1} f\left(\vartheta_\lambda, \frac{\mu\pi}{p}\right)\cos\frac{r\mu\pi}{p} = a_{r\lambda}\sum_{\mu=0}^{2p-1}\cos^2\frac{r\mu\pi}{p} \tag{2}$$

$$= \begin{cases} 2pa_{r\lambda} & \text{für } r = 0 \text{ oder } p, \\ pa_{r\lambda} & \text{für } r = 1, 2, \ldots, p-1. \end{cases}$$

$$\sum_{\mu=0}^{2p-1} f\left(\vartheta_\lambda, \frac{\mu\pi}{p}\right)\sin\frac{r\mu\pi}{p} = b_{r\lambda}\sum_{\mu=0}^{2p-1}\sin^2\frac{r\mu\pi}{p}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{für } r = 0 \text{ oder } p, \\ pb_{r\lambda} & \text{für } r = 1, 2, \ldots, p-1. \end{cases}$$

Die Koeffizienten $a_{r\lambda}$ und $b_{r\lambda}$ sind damit bestimmt, mit Ausnahme von $b_{0\lambda}$ und $b_{p\lambda}$; doch ist $b_{0\lambda}$ in der Entwicklung (1) mit Null multipliziert und $b_{p\lambda}$ kann für die in (10·1) angegebenen Werte von φ nicht bestimmt werden, weil $\sin p\varphi$ für diese Werte verschwindet. Wir können daher $b_{0\lambda}$ und $b_{p\lambda}$ einfach gleich Null setzen.

Unsere nächste Aufgabe ist es nun, aus den $a_{k\lambda}$ und $b_{k\lambda}$ die Koeffizienten A_{nk} und B_{nk} zu berechnen. Es ist nach (10·2) und (1)

$$(3)\quad \begin{cases} a_{k\lambda} = A_{kk} P_k^k(\cos\vartheta_\lambda) + A_{k+1,k} P_{k+1}^k(\cos\vartheta_\lambda) + \cdots + A_{pk} P_p^k(\cos\vartheta_\lambda), \\ b_{k\lambda} = B_{kk} P_k^k(\cos\vartheta_\lambda) + B_{k+1,k} P_{k+1}^k(\cos\vartheta_\lambda) + \cdots + B_{pk} P_p^k(\cos\vartheta_\lambda). \end{cases}$$

Wir multiplizieren diese Gleichungen mit $c_\lambda P_n^k(\cos\vartheta_\lambda)$, wobei die c_λ bestimmte Konstanten sind, über die später geeignet verfügt werden soll. Wir erhalten

$$(4)\quad \begin{aligned} \sum_{\lambda=1}^{q} c_\lambda a_{k\lambda} P_n^k(\cos\vartheta_\lambda) &= \sum_{m=k}^{p} A_{mk} \sum_{\lambda=1}^{q} c_\lambda P_n^k(\cos\vartheta_\lambda) P_m^k(\cos\vartheta_\lambda), \\ \sum_{\lambda=1}^{q} c_\lambda b_{k\lambda} P_n^k(\cos\vartheta_\lambda) &= \sum_{m=k}^{p} B_{mk} \sum_{\lambda=1}^{q} c_\lambda P_n^k(\cos\vartheta_\lambda) P_m^k(\cos\vartheta_\lambda). \end{aligned}$$

Nun ist $P_m^k(x) P_n^k(x)$ nach (I·18) ein Polynom $\sum_{\nu=0}^{m+n} C_\nu x^\nu$ vom Grad $m+n$, daher

$$\int_{-1}^{+1} P_m^k(x) P_n^k(x)\, dx = \sum_{\nu=0}^{m+n} C_\nu \int_{-1}^{+1} x^\nu\, dx.$$

Wenn wir bei gegebenen ξ_λ die Zahlen c_λ so bestimmen können, daß

$$(5)\quad \sum_{\lambda=1}^{q} c_\lambda \xi_\lambda^\nu = \int_{-1}^{+1} x^\nu\, dx = \begin{cases} \dfrac{2}{\nu+1} & \text{für gerades } \nu, \\ 0 & \text{für ungerades } \nu \end{cases} \qquad (0 \leqq \nu \leqq 2p)$$

wird, erhalten wir nach (I, 21·5)

$$(6)\quad \begin{aligned} \sum_{\lambda=1}^{q} c_\lambda P_m^k(\xi_\lambda) P_n^k(\xi_\lambda) &= \sum_{\lambda=1}^{q} c_\lambda \sum_{\nu=0}^{m+n} C_\nu \xi_\lambda^\nu \\ &= \sum_{\nu=0}^{m+n} C_\nu \sum_{\lambda=1}^{q} c_\lambda \xi_\lambda^\nu = \sum_{\nu=0}^{m+n} C_\nu \int_{-1}^{+1} x^\nu\, dx \\ &= \int_{-1}^{+1} P_m^k(x) P_n^k(x)\, dx = \begin{cases} \dfrac{2}{2n+1} \dfrac{(n+k)!}{(n-k)!} & \text{für } m = n, \\ 0 & \text{für } m \neq n \end{cases} \end{aligned}$$

$$(0 \leqq m \leqq p;\quad 0 \leqq n \leqq p;\quad 0 \leqq k \leqq m, n).$$

Setzen wir jetzt $\xi_\lambda = \cos\vartheta_\lambda$, so ergibt sich aus (4)

$$(7)\quad \begin{cases} \sum_{\lambda=1}^{q} c_\lambda a_{k\lambda} P_n^k(\cos\vartheta_\lambda) = \frac{2}{2n+1}\frac{(n+k)!}{(n-k)!} A_{nk}, \\ \sum_{\lambda=1}^{q} c_\lambda b_{k\lambda} P_n^k(\cos\vartheta_\lambda) = \frac{2}{2n+1}\frac{(n+k)!}{(n-k)!} B_{nk} \\ (k=0,\,1,\,2,\,\ldots,\,p;\quad n=k,\,k+1,\,\ldots,\,p). \end{cases}$$

Damit sind die gesuchten Koeffizienten A_{nk} und B_{nk} berechnet, wenn wir noch die Bedingungen (5) nach den c_λ auflösen können. Das ist für $q = 2p+1$ immer der Fall. Denn die Determinante dieses Gleichungssystems ist in diesem Fall $(2p = q-1)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots 1 \\ \xi_1 & \xi_2 & \cdots \xi_q \\ \xi_1^2 & \xi_2^2 & \cdots \xi_q^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \xi_1^{q-1} & \xi_2^{q-1} & \cdots \xi_q^{q-1} \end{vmatrix}.$$

Zieht man die erste Spalte von allen übrigen ab, so erhält man in der ersten Zeile 1, 0 . . ., 0 und die Determinante wird durch

$$\xi_2 - \xi_1,\quad \xi_3 - \xi_1,\ \ldots,\ \xi_q - \xi_1$$

teilbar. Entwickelt man nun die Determinante nach der ersten Zeile, so ergibt sich

$$(\xi_2-\xi_1)(\xi_3-\xi_1)\cdots(\xi_q-\xi_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots \\ \xi_1+\xi_2 & \xi_1+\xi_3 & \cdots \\ \xi_1^2+\xi_1\xi_2+\xi_2^2 & \xi_1^2+\xi_1\xi_3+\xi_3^2 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}.$$

Wir multiplizieren die erste Zeile der Reihe nach mit $\xi_1, \xi_1^2, \ldots$ und ziehen sie von der zweiten, dritten usw. ab, hierauf die neue zweite mit $\xi_1, \xi_1^2, \ldots$ usw. und ziehen von der dritten, vierten usw. ab. Dadurch läßt sich die neue Determinante auf die Gestalt bringen

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots 1 \\ \xi_2 & \xi_3 & \cdots \xi_q \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \xi_2^{q-2} & \xi_3^{q-2} & \cdots \xi_q^{q-2} \end{vmatrix}.$$

Behandelt man diese ebenso wie früher, so erhält man schließlich als Ergebnis für die Determinante

$$(\xi_2-\xi_1)(\xi_3-\xi_1)\cdots(\xi_q-\xi_1)(\xi_3-\xi_2)\cdots(\xi_3-\xi_q)\cdots(\xi_q-\xi_{q-1}).$$

Sie ist nur 0, wenn zwei der ξ_ν miteinander übereinstimmen, was bei uns nicht der Fall ist; damit ist die Behauptung bewiesen.

12. Hilfssatz über Kugelfunktionen. Die Koeffizienten in der Entwicklung von $f(\vartheta, \varphi)$ nach LAPLACEschen Kugelfunktionen bis zu Funktionen p-ten Grades lassen sich sonach bestimmen, wenn $f(\vartheta, \varphi)$ für $2p$ äquidistant über den ganzen Kreis verteilte Werte von φ und $2p+1$ beliebige, untereinander verschiedene Werte von ϑ gegeben ist. Es genügen jedoch auch schon $p+1$ Werte von ϑ, die aber dann in bestimmter Weise gewählt sein müssen.

Die Gleichungen (11·5) lassen sich nämlich auch für $q = p + 1$ befriedigen, wenn wir $0 \leqq \nu \leqq 2p+1$ voraussetzen. In diesem Fall sind aber die ξ_λ nicht mehr willkürlich, sondern sie müssen die Nullstellen von $P_q(\xi)$ sein. Zum Beweis entwickeln wir

$$\prod_{\lambda=1}^{q} (1 - \xi_\lambda z) = \sum_{\nu=0}^{q} D_\nu z^\nu \qquad (D_0 = 1)\,.$$

Es ist

$$\frac{c_\lambda}{2(1-\xi_\lambda z)} = \frac{c_\lambda}{2} \sum_{\nu=0}^{\infty} \xi_\lambda^\nu z^\nu$$

für entsprechend kleine $|z|$, also wegen (11·5) $(2p+1 = 2q-1)$

$$\frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^{q} \frac{c_\lambda}{1-\xi_\lambda z} = 1 + \frac{z^2}{3} + \frac{z^4}{5} + \cdots + \frac{z^{2q-2}}{2q-1} + C z^{2q} + \cdots$$

Wenn wir diese Gleichung mit dem Produkt der Nenner der linken Seite multiplizieren, erhalten wir ein Polynom, das den Grad $q-1$ nicht übersteigt,

(1) $$\sum_{\nu=0}^{q-1} E_\nu z^\nu = \sum_{\nu=0}^{q} D_\nu z^\nu \left(1 + \frac{z^2}{3} + \frac{z^4}{5} + \cdots\right).$$

Die Koeffizienten von z^q, z^{q+1}, $z^{q+2}, \ldots, z^{2q-1}$ auf der rechten Seite müssen Null sein, daher haben wir die q Gleichungen für die D_q

(2) $$\begin{aligned}
\frac{D_q}{1} + \frac{D_{q-2}}{3} + \frac{D_{q-4}}{5} + \cdots &= 0,\\
\frac{D_{q-1}}{3} + \frac{D_{q-3}}{5} + \frac{D_{q-5}}{7} + \cdots &= 0,\\
\frac{D_q}{3} + \frac{D_{q-2}}{5} + \frac{D_{q-4}}{7} + \cdots &= 0,\\
\frac{D_{q-1}}{5} + \frac{D_{q-3}}{7} + \frac{D_{q-5}}{9} + \cdots &= 0,\\
\frac{D_q}{5} + \frac{D_{q-2}}{7} + \frac{D_{q-4}}{9} + \cdots &= 0,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&
\end{aligned}$$

$P_q(\xi) = \sum_{\nu=0}^{q} \beta_\nu \xi^\nu$ sei das LEGENDREsche Polynom vom Grade q. Wie wir aus Ziffer (I·31) wissen, sind die β_ν bis auf einen Faktor durch die Bedingungen

$$\int_{-1}^{+1} \xi^m P_q(\xi)\, d\xi = 0 \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots, q-1) \tag{3}$$

oder, da $\sum_{\nu=0}^{q} \beta_\nu \int_{-1}^{+1} \xi^{m+\nu}\, d\xi = \sum_{\nu=0}^{q} \frac{2\beta_\nu}{m+\nu+1}$ $(m+\nu+1$ ungerade) ist, durch

$$\sum_{\nu=0}^{q} \frac{\beta_\nu}{m+\nu+1} = 0 \tag{4}$$

bestimmt. Die Glieder mit geradem $m+\nu+1$ fallen bei der Integration weg.

Somit erhält man für

$$\begin{aligned}
m = 0:&\ \frac{\beta_0}{1} + \frac{\beta_2}{3} + \frac{\beta_4}{5} + \cdots = 0,\\
m = 1:&\ \frac{\beta_1}{3} + \frac{\beta_3}{5} + \frac{\beta_5}{7} + \cdots = 0,\\
m = 2:&\ \frac{\beta_0}{3} + \frac{\beta_2}{5} + \frac{\beta_4}{7} + \cdots = 0,\\
m = 3:&\ \frac{\beta_1}{5} + \frac{\beta_3}{7} + \frac{\beta_5}{9} + \cdots = 0,\\
m = 4:&\ \frac{\beta_0}{5} + \frac{\beta_2}{7} + \frac{\beta_4}{9} + \cdots = 0,\\
&\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem stimmt mit den Gleichungen (2) überein, infolgedessen sind nach (I·31) die D_ν bis auf einen gemeinsamen Faktor die Koeffizienten von $P_q(\xi)$.

Das Polynom $z^q \sum_{\nu=0}^{q} \frac{D_\nu}{z^\nu}$ stimmt also bis auf den Faktor von z^q mit $P_q(z)$ überein, seine Nullstellen ξ_λ sind daher die Nullstellen von $P_q(z)$. Die Gleichungen (2) wurden unter der Voraussetzung der Gültigkeit von (II·5) und von $q = p + 1$ gewonnen; somit lassen sich diese Forderungen nur dann erfüllen, wenn die ξ_λ die Nullstellen von $P_q(\xi)$ sind.

13. Hilfssatz aus der Algebra. Wir haben jetzt noch zu zeigen, wie man aus den Gleichungen (II·5) die c_λ berechnen kann, wenn man $q = p + 1$ und somit für die ξ_λ die Nullstellen von $P_q(\xi)$ wählt. Wir brauchen dazu einen Hilfssatz aus der Algebra.

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ seien n Unbestimmte, $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ ihre sogenannten symmetrischen Grundfunktionen, d. h. σ_1 sei ihre Summe, σ_2 die Summe

der Produkte aller Kombinationen zu je zweien, σ_3 die der Produkte zu je dreien usw., σ_n ihr Produkt. Lassen wir eine dieser Unbestimmten, z. B. die erste weg, so mögen $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{n-1}$ die symmetrischen Grundfunktionen der übrigen sein. Dann ergibt sich

$$\begin{cases} \sigma_1 = \tau_1 + x_1, \\ \sigma_2 = \tau_2 + x_1 \tau_1, \\ \sigma_3 = \tau_3 + x_1 \tau_2, \\ \cdots\cdots\cdots \\ \sigma_n = x_1 \tau_{n-1} \end{cases}$$

oder

$$(1) \qquad \begin{cases} \tau_1 = \sigma_1 - x_1, \\ \tau_2 = \sigma_2 - x_1\sigma_1 + x_1^2, \\ \tau_3 = \sigma_3 - x_1\sigma_2 + x_1^2\sigma_1 - x_1^3, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Die symmetrischen Grundfunktionen der ξ_λ sind zufolge der Beziehung

$$(2) \qquad \prod_{\lambda=1}^{q} (1 - \xi_\lambda z) = \sum_{\nu=0}^{q} D_\nu z^\nu \qquad (D_0 = 1)$$

mit Hilfe von Koeffizientenvergleichung durch $-D_1, D_2, -D_3, D_4, \ldots$ gegeben. Wir bilden nun

$$(3) \qquad \frac{1}{2}\sum_{\lambda=1}^{q} \frac{c_\lambda}{1 - \xi_\lambda z}$$
$$= \frac{c_1(1-\xi_2 z)(1-\xi_3 z)\cdots(1-\xi_q z) + c_2(1-\xi_1 z)(1-\xi_3 z)\cdots(1-\xi_q z) + \cdots}{2\prod_{\lambda=1}^{q}(1-\xi_\lambda z)}.$$

Multiplizieren wir die Produkte im Zähler von (3) aus und ordnen nach Potenzen von z, so erhalten wir, von den Faktoren c_λ abgesehen, im ersten Glied der Reihe nach mit abwechselnden Zeichen die symmetrischen Grundfunktionen von $\xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_q$ als Koeffizienten von $z, z^2, \ldots, z^{q-1}$, im zweiten die von $\xi_1, \xi_3, \ldots, \xi_q$ usw. Wir müssen sie jedesmal mit $c_1, c_2, \ldots$ multiplizieren und addieren, um die gesamten Koeffizienten von $z, z^2, \ldots$ zu erhalten. Wir wollen die symmetrischen Grundfunktionen von $\xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_q$ mit $\tau_{11}, \tau_{21}, \tau_{31}, \ldots$, die von $\xi_1, \xi_3, \ldots, \xi_q$ mit $\tau_{12}, \tau_{22}, \tau_{32}, \ldots$ usw. bezeichnen. Dann ist nach den Gleichungen (1)

$$\tau_{11} = -D_1 - \xi_1, \quad \tau_{21} = D_2 + \xi_1 D_1 + \xi_1^2, \quad \tau_{31} = -D_3 - \xi_1 D_2 - \xi_1^2 D_1 - \xi_1^3, \ldots$$

$$\tau_{12} = -D_1 - \xi_2, \quad \tau_{22} = D_2 + \xi_2 D_1 + \xi_2^2, \quad \tau_{32} = -D_3 - \xi_2 D_2 - \xi_2^2 D_1 - \xi_2^3, \ldots$$

Wir haben also die erste Zeile dieser Gleichungen mit c_1, die zweite mit c_2 usw. zu multiplizieren und dann die Spalten zu addieren, um mit abwechselnden Vorzeichen die Koeffizienten von z, z^2, ... im Zähler unseres Bruches zu erhalten. Es ergibt sich, da das konstante Glied $\sum_{\lambda=1}^{q} c_\lambda$ ist, für die Koeffizienten von z^0, z^1, z^2, z^3, ...

$$(4)\qquad \begin{cases} \Sigma c_\lambda, \\ D_1 \Sigma c_\lambda + \Sigma c_\lambda \xi_\lambda, \\ D_2 \Sigma c_\lambda + D_1 \Sigma c_\lambda \xi_\lambda + \Sigma c_\lambda \xi_\lambda^2, \\ D_3 \Sigma c_\lambda + D_2 \Sigma c_\lambda \xi_\lambda + D_1 \Sigma c_\lambda \xi_\lambda^2 + \Sigma c_\lambda \xi_\lambda^3, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

oder mit Rücksicht auf (11·5), wenn wir noch wegen des Faktors 2 im Nenner von (3) die Hälfte nehmen, $1,\ D_1,\ D_2 + \frac{1}{3},\ D_3 + \frac{1}{3} D_1, \dots$. Den Ausführungen am Beginn der vorigen Ziffer entnehmen wir, daß der Zähler der rechten Seite von (3) $\left(\text{einschließlich des Faktors } \frac{1}{2}\right)$ durch (12·1), der Nenner durch (2) gegeben ist. Wir haben daher

$$\begin{aligned} E_0 &= 1, \\ E_1 &= D_1, \\ E_2 &= D_2 + \frac{1}{3}, \\ E_3 &= D_3 + \frac{1}{3} D_1, \\ E_4 &= D_4 + \frac{1}{3} D_2 + \frac{1}{5}, \\ E_5 &= D_5 + \frac{1}{3} D_3 + \frac{1}{5} D_1, \\ E_6 &= D_6 + \frac{1}{3} D_4 + \frac{1}{5} D_2 + \frac{1}{7}, \\ E_7 &= D_7 + \frac{1}{3} D_5 + \frac{1}{5} D_3 + \frac{1}{7} D_1, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Das Bildungsgesetz ist klar. Die D_λ sind nach Ziffer 12 die Koeffizienten von $P_q(z)$, dividiert durch den Koeffizienten C_q der höchsten Potenz z^q, weil $D_0 = 1$ ist. Es ist also

$$D_0 = 1, \quad D_1 = D_3 = D_5 = \cdots = 0.$$

D_2, D_4, D_6, ... sind die Koeffizienten von z^{q-2}, z^{q-4}, z^{q-6}, ..., dividiert durch C_q. Wir erhalten demnach auch

$$E_1 = E_3 = E_5 = \cdots = 0.$$

Der Bruch (3) hat also die Gestalt

$$\frac{\sum\limits_{\nu=0}^{q-1} E_\nu z^\nu}{\sum\limits_{\nu=0}^{q} D_\nu z^\nu} = \frac{C_q Q_{q-1}(z)}{z^q P_q\left(\frac{1}{z}\right)},$$

wenn wir

$$Q_{q-1}(z) = \sum_{\nu=0}^{q-1} E_\nu z^\nu$$

setzen.

Zerlegen wir diesen Bruch in Teilbrüche gemäß den Nullstellen η_λ des Nenners, so erhalten wir

$$\sum_{\lambda=1}^{q} \frac{\alpha_\lambda}{z-\eta_\lambda} = \frac{1}{2}\sum_{\lambda=1}^{q} \frac{c_\lambda}{1-\xi_\lambda z},$$

daher

$$\alpha_\lambda = -\frac{c_\lambda}{2\,\xi_\lambda}, \quad \eta_\lambda = \frac{1}{\xi_\lambda}.$$

Nun ist nach einer bekannten Formel der Teilbruchzerlegung

$$\alpha_\lambda = \frac{C_q Q_{q-1}(\eta_\lambda)}{\frac{d}{dz}\left[z^q P_q\left(\frac{1}{z}\right)\right]\Big|_{z=\eta_\lambda}} = \frac{C_q Q_{q-1}(\eta_\lambda)}{q\,\eta_\lambda^{q-1} P_q\left(\frac{1}{\eta_\lambda}\right) - \eta_\lambda^{q-2} P_q'\left(\frac{1}{\eta_\lambda}\right)} = -\frac{C_q Q_{q-1}\left(\frac{1}{\xi_\lambda}\right)\xi_\lambda^{q-2}}{P_q'(\xi_\lambda)},$$

daher

$$c_\lambda = \frac{2\,C_q\,\xi_\lambda^{q-1} Q_{q-1}\left(\frac{1}{\xi_\lambda}\right)}{P_q'(\xi_\lambda)}.$$

Damit sind die Zahlen c_λ sämtlich berechnet und die Behauptung am Anfang von Ziffer 12 ist damit bewiesen.

14. Entwicklung einer durch Beobachtungen gegebenen Funktion nach Legendreschen Polynomen. Die Formel (11·6) gilt ihrer Herleitung gemäß auch für $k = 0$ und liefert dann

(1) $$\sum_{\lambda=1}^{q} c_\lambda P_m(\xi_\lambda)\, P_n(\xi_\lambda) = \begin{cases} \dfrac{2}{2n+1} & \text{für } m = n, \\ 0 & \text{für } m \neq n. \end{cases}$$

Haben wir also eine Funktion $f(\xi)$ für $q = p + 1$ untereinander verschiedene Werte $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{p+1}$ zwischen -1 und $+1$ gegeben, so können wir den Ansatz

$$f(\xi) = \sum_{n=0}^{p} A_n P_n(\xi)$$

machen und haben

$$f(\xi_\lambda) = \sum_{n=0}^{p} A_n P_n(\xi_\lambda) \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, p+1).$$

Multiplizieren wir diese Gleichungen mit $c_\lambda P_m(\xi_\lambda)$ und addieren, so ergibt sich nach (1)

$$\sum_{\lambda=1}^{p+1} c_\lambda f(\xi_\lambda) P_m(\xi_\lambda) = \frac{2 A_m}{2m+1}$$

oder

$$A_m = \left(m + \frac{1}{2}\right) \sum_{\lambda=1}^{p+1} c_\lambda f(\xi_\lambda) P_m(\xi_\lambda) \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots, p).$$

Dabei müssen die ξ_λ geeignet gegeben, nämlich gemäß Ziffer 12 die Nullstellen von $P_{p+1}(\xi)$ sein und die c_λ dann nach den Formeln der Ziffer 13 berechnet werden.

Wir wollen jetzt $f(\xi)$ noch in anderer Weise nach LEGENDREschen Polynomen entwickeln. Wir setzen wieder an

$$f(\xi) = \sum_{n=0}^{p} A_n P_n(\xi)$$

und wollen annehmen, daß $2p$ Beobachtungen vorhanden sind. Dann können wir die Koeffizienten nicht mehr so bestimmen, daß alle Gleichungen

$$f(\xi_\lambda) = \sum_{n=0}^{p} A_n P_n(\xi_\lambda)$$

erfüllt sind, wohl aber so, daß $\sum_{\lambda=1}^{2p} \left[f(\xi_\lambda) - \sum_{n=0}^{p} A_n P_n(\xi_\lambda) \right]^2$ seinen kleinsten Wert annimmt.

Wir denken uns die ξ_λ so gewählt, daß

$$(2) \qquad \sum_{\lambda=1}^{2p} \xi_\lambda^\nu = p \int_{-1}^{+1} x^\nu \, dx = \begin{cases} \dfrac{2p}{\nu+1} & \text{für gerades } \nu, \\ 0 & \text{für ungerades } \nu \end{cases}$$

$(0 \leqq \nu \leqq 2p)$ ist. Wie das zu geschehen hat, werden wir später sehen.

Nun überlegen wir ähnlich wie in Ziffer 11. $P_m(x) P_n(x)$ ist ein Polynom in x vom Grad $m+n$; es sei $\sum_{\nu=0}^{m+n} C_\nu x^\nu$. Dann haben wir nach (2) und (I, 21·1)

$$\sum_{\lambda=1}^{2p} P_m(\xi_\lambda) P_n(\xi_\lambda) = \sum_{\lambda=1}^{2p} \sum_{\nu=0}^{m+n} C_\nu \xi_\lambda^\nu$$

$$= p \sum_{\nu=0}^{m+n} C_\nu \int_{-1}^{+1} x^\nu \, dx = p \int_{-1}^{+1} P_m(x) P_n(x) \, dx = \begin{cases} \dfrac{2p}{2n+1} & \text{für } m = n, \\ 0 & \text{für } m \neq n \end{cases}$$

$$(0 \leqq m \leqq p;\ 0 \leqq n \leqq p).$$

Damit wird

(3) $$\sum_{\lambda=1}^{2p}\left[f(\xi_\lambda)-\sum_{n=0}^{p}A_n P_n(\xi_\lambda)\right]^2$$

$$=\sum_{\lambda=1}^{2p}[f(\xi_\lambda)]^2-2\sum_{n=0}^{p}A_n\sum_{\lambda=1}^{2p}f(\xi_\lambda)P_n(\xi_\lambda)+2p\sum_{n=0}^{p}\frac{A_n^2}{2n+1}$$

$$=\sum_{\lambda=1}^{2p}[f(\xi_\lambda)]^2+\sum_{n=0}^{p}\left[A_n\sqrt{\frac{2p}{2n+1}}-\sqrt{\frac{2n+1}{2p}}\sum_{\lambda=1}^{2p}f(\xi_\lambda)P_n(\xi_\lambda)\right]^2$$

$$-\sum_{n=0}^{p}\frac{2n+1}{2p}\left[\sum_{\lambda=1}^{2p}f(\xi_\lambda)P_n(\xi_\lambda)\right]^2,$$

Der Ausdruck (3) nimmt also seinen kleinsten Wert an, wenn man

(4) $$A_n=\frac{2n+1}{2p}\sum_{\lambda=1}^{2p}f(\xi_\lambda)P_n(\xi_\lambda)$$

setzt.

Jetzt haben wir noch die Gleichungen (2) aufzulösen. Bezeichnen wir die symmetrischen Grundfunktionen der ξ_λ wieder mit $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_{2p}$ und setzen

(5) $$s_\nu=\sum_{\lambda=1}^{2p}\xi_\lambda^\nu.$$

Es ist also nach (2)

$$s_0=2p,\quad s_2=\frac{2p}{3},\quad s_4=\frac{2p}{5},\ \ldots,\ s_{2p}=\frac{2p}{2p+1},$$

$$s_1=s_3=s_5=\cdots=s_{2p-1}=0.$$

Wir greifen jetzt nochmals auf die Überlegungen aus Ziffer 12 und 13 zurück, d. h. wir bilden $\sum_{\lambda=1}^{2p}\frac{c_\lambda}{1-\xi_\lambda z}$, setzen aber $c_\lambda=\xi_\lambda$. Dann erhalten wir für die Koeffizienten des Zählers, wenn wir alle Brüche auf den gemeinsamen Nenner

$$\varphi(z)=\prod_{\lambda=1}^{2p}(1-\xi_\lambda z)$$

bringen, unter Benützung der Abkürzungen s_ν

$$s_1,\quad s_2-\sigma_1 s_1,\quad s_3-\sigma_1 s_2+\sigma_2 s_1,\quad s_4-\sigma_1 s_3+\sigma_2 s_2-\sigma_3 s_1,\ \ldots$$

Wir haben einfach in (13·3) $q=2p$, $c_\lambda=\xi_\lambda$, $D_1=-\sigma_1$, $D_2=\sigma_2$, $D_3=-\sigma_3$, $D_4=\sigma_4, \ldots$ zu setzen und (5) zu verwenden. Nun ist

$$\varphi(z)=1-\sigma_1 z+\sigma_2 z^2-\cdots+\sigma_{2p}z^{2p},$$

$$\varphi'(z)=-\sigma_1+2\sigma_2 z-\cdots+2p\,\sigma_{2p}z^{2p-1}$$

$$=-\varphi(z)\sum_{\lambda=1}^{2p}\frac{\xi_\lambda}{1-\xi_\lambda z},$$

wenn wir logarithmisch differenzieren, daher

$$\sigma_1 - 2\sigma_2 z + \cdots - 2p\,\sigma_{2p} z^{2p-1}$$
$$= s_1 + (s_2 - \sigma_1 s_1) z + (s_3 - \sigma_1 s_2 + \sigma_2 s_1) z^2 + \cdots,$$

also

$$\sigma_1 = s_1,$$
$$-2\sigma_2 = s_2 - \sigma_1 s_1,$$
$$3\sigma_3 = s_3 - \sigma_1 s_2 + \sigma_2 s_1,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

allgemein

$$s_\nu - \sigma_1 s_{\nu-1} + \sigma_2 s_{\nu-2} - \cdots + (-1)^\nu \nu\,\sigma_\nu = 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots, 2p).$$

Aus diesen Gleichungen lassen sich der Reihe nach die σ_ν berechnen, wenn die s_ν gegeben sind. In unserem Fall erhält man wegen

$$s_1 = s_3 = \cdots = s_{2p-1} = 0$$

auch

(6) $$\sigma_1 = \sigma_3 = \cdots = \sigma_{2p-1} = 0.$$

Nachdem die σ_ν berechnet sind, ergeben sich die ξ_λ als Lösungen der Gleichung $\varphi\left(\frac{1}{z}\right) = 0$. Neben ξ_λ kommt wegen (6) immer auch $-\xi_\lambda$ als Lösung vor. Z. B. liefert $p = 1$ die beiden Werte $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, $p = 2$ die vier Werte $\pm\sqrt{\frac{1}{3}\left(1 \pm \frac{2}{\sqrt{5}}\right)}$. Sind alle ξ_λ reell, so liegen sie zwischen -1 und $+1$; denn wäre auch nur eines der $\xi_\lambda \geqq 1$, so könnte

$$s_{2p} = \xi_1^{2p} + \xi_2^{2p} + \cdots + \xi_{2p}^{2p}$$

nicht $\frac{2p}{2p+1}$, also < 1 sein. Sind außerdem sämtliche Lösungen einfach, so kann man die Gleichungen (2) in der geforderten Weise erfüllen. Setzt man dann für die A_n die durch die Formel (4) gegebenen Werte, so hat die Entwicklung

(7) $$\sum_{n=0}^{p} A_n P_n(\xi)$$

die Eigenschaft, daß $\sum_{\lambda=1}^{2p}\left[f(\xi_\lambda) - \sum_{n=0}^{p} A_n P_n(\xi_\lambda)\right]^2$ seinen kleinsten Wert annimmt, genauer gesprochen: der genannte Ausdruck ist größer, wenn man für die A_n andere als die in (4) angegebenen Werte wählt. Die Annäherung der Funktion $f(\xi)$ durch die Entwicklung (7) erfolgt also im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate.

§ 3. Dreifach orthogonale Flächensysteme, besondere Lösungen der Laplaceschen Differentialgleichung.

15. Besondere krummlinige Koordinaten. Wir führen Zylinderkoordinaten ein, d. h. wir setzen

(1) $$\begin{cases} x = \varrho\cos\varphi \\ y = \varrho\sin\varphi \\ z = z\,. \end{cases}$$

Sie gehören zu einem besonderen dreifach orthogonalen System, den Drehzylindern $\varrho = \text{const}$ mit der Z-Achse als Drehachse, den Ebenen $\varphi = \text{const}$ durch die Z-Achse und den Ebenen $z = \text{const}$ parallel zur XY-Ebene. Das Bogenelement ist hier

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\varrho^2 + \varrho^2\,d\varphi^2 + dz^2.$$

Nun führen wir an Stelle von ϱ und z die Koordinaten η und ϑ durch die Formel

(2) $$z + i\varrho = f(\eta + i\vartheta)$$

ein, d. h. wir denken uns f als analytische Funktion der komplexen Veränderlichen $\eta + i\vartheta$ und betrachten z und $i\varrho$ als ihren reellen und imaginären Teil. Die Kurven $\eta = \text{const}$ und $\vartheta = \text{const}$ der z, ϱ-Ebene schneiden sich nach der Lehre der konformen Abbildung rechtwinklig, daher auch die Flächen $\eta = \text{const}$ und $\vartheta = \text{const}$ im Raum mit Rücksicht auf die Drehsymmetrie des Systems bezüglich der Z-Achse als Drehachse. Diese Flächen werden wieder von den Ebenen $\varphi = \text{const}$ rechtwinklig geschnitten. Wir haben also ein dreifach orthogonales Flächensystem.

Es ist

$$\begin{cases} dz + i\,d\varrho = f'(\eta + i\vartheta)\,(d\eta + i\,d\vartheta)\,, \\ dz - i\,d\varrho = f'(\eta - i\vartheta)\,(d\eta - i\,d\vartheta)\,, \end{cases}$$

somit

(3) $$dz^2 + d\varrho^2 = f'(\eta + i\vartheta)\,f'(\eta - i\vartheta)\,(d\eta^2 + d\vartheta^2)\,,$$

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = \varrho^2 d\varphi^2 + f'(\eta + i\vartheta)\,f'(\eta - i\vartheta)\,(d\eta^2 + d\vartheta^2)\,,$$

also nach (I, 2·9)

(4) $$H_1^2 = \frac{1}{\varrho^2}\,,\quad H_2^2 = H_3^2 = \frac{1}{f'(\eta + i\vartheta)\,f'(\eta - i\vartheta)}\,.$$

$\Delta V = 0$ wird daher nach (I, 4·1)

(5) $$f'(\eta + i\vartheta)\,f'(\eta - i\vartheta)\,\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\varrho}\,\frac{\partial V}{\partial\varphi}\right) + \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\varrho\,\frac{\partial V}{\partial\eta}\right) + \frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\varrho\,\frac{\partial V}{\partial\vartheta}\right) = 0$$

mit

$$2i\varrho = f(\eta + i\vartheta) - f(\eta - i\vartheta)$$

gemäß (2).

Wir versuchen wie in Ziffer (I·47) eine Lösung durch den Ansatz $V = H\Theta\Phi$ zu erhalten, wobei H nur von η, Θ nur von ϑ, Φ nur von φ abhängen soll. Damit wird aus (5)

$$-\frac{4}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + \frac{1}{H}\frac{f(\eta+i\vartheta)-f(\eta-i\vartheta)}{f'(\eta+i\vartheta)f'(\eta-i\vartheta)}\frac{\partial}{\partial\eta}\left\{[f(\eta+i\vartheta)-f(\eta-i\vartheta)]\frac{dH}{d\eta}\right\}$$
$$+\frac{1}{\Theta}\frac{f(\eta+i\vartheta)-f(\eta-i\vartheta)}{f'(\eta+i\vartheta)f'(\eta-i\vartheta)}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left\{[f(\eta+i\vartheta)-f(\eta-i\vartheta)]\frac{d\Theta}{d\vartheta}\right\} = 0.$$

Da das erste Glied nur von φ und die beiden anderen nur von η und ϑ abhängen, muß es konstant sein, also z. B.

$$\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} = -m^2,$$

d. h.

$$\Phi = A_m \cos m\varphi + B_m \sin m\varphi.$$

Dann bleibt noch

$$\frac{1}{H}\frac{f(\eta+i\vartheta)-f(\eta-i\vartheta)}{f'(\eta+i\vartheta)f'(\eta-i\vartheta)}\frac{\partial}{\partial\eta}\left\{[f(\eta+i\vartheta)-f(\eta-i\vartheta)]\frac{dH}{d\eta}\right\} \tag{6}$$
$$+\frac{1}{\Theta}\frac{f(\eta+i\vartheta)-f(\eta-i\vartheta)}{f'(\eta+i\vartheta)f'(\eta-i\vartheta)}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left\{[f(\eta+i\vartheta)-f(\eta-i\vartheta)]\frac{d\Theta}{d\vartheta}\right\} + 4m^2 = 0.$$

Wenn wir nun voraussetzen, daß

$$\frac{f'(\eta+i\vartheta)f'(\eta-i\vartheta)}{[f(\eta+i\vartheta)-f(\eta-i\vartheta)]^2} = \chi_1(\eta)+\chi_2(\vartheta) \tag{7}$$

ist, so wird aus (6)

$$\frac{1}{H}\frac{d^2H}{d\eta^2} + \frac{1}{\Theta}\frac{d^2\Theta}{d\vartheta^2} + \frac{f'(\eta+i\vartheta)-f'(\eta-i\vartheta)}{f(\eta+i\vartheta)-f(\eta-i\vartheta)}\frac{1}{H}\frac{dH}{d\eta}$$
$$+ i\frac{f'(\eta+i\vartheta)+f'(\eta-i\vartheta)}{f(\eta+i\vartheta)-f(\eta-i\vartheta)}\frac{1}{\Theta}\frac{d\Theta}{d\vartheta} + 4m^2[\chi_1(\eta)+\chi_2(\vartheta)] = 0.$$

Ist weiter

$$\frac{f'(\eta+i\vartheta)-f'(\eta-i\vartheta)}{f(\eta+i\vartheta)-f(\eta-i\vartheta)} = F_1(\eta) \tag{8}$$

und

$$i\frac{f'(\eta+i\vartheta)+f'(\eta-i\vartheta)}{f(\eta+i\vartheta)-f(\eta-i\vartheta)} = F_2(\vartheta),$$

so muß sein ($\alpha = \text{const}$)

$$\begin{cases} \dfrac{d^2H}{d\eta^2} + F_1(\eta)\dfrac{dH}{d\eta} + 4m^2\chi_1(\eta)\,H = \alpha H, \\ \dfrac{d^2\Theta}{d\vartheta^2} + F_2(\vartheta)\dfrac{d\Theta}{d\vartheta} + 4m^2\chi_2(\vartheta)\,\Theta = -\alpha\Theta. \end{cases} \tag{9}$$

16. Verlängertes Drehellipsoid. Wir setzen

$$f(\eta + i\vartheta) = c\,\mathfrak{Cof}\,(\eta + i\vartheta), \tag{1}$$

wobei $c > 0$ sein soll, dann wird

$$\begin{cases} z = c\,\mathfrak{Cof}\,\eta \cos\vartheta, \\ \varrho = c\,\mathfrak{Sin}\,\eta \sin\vartheta, \end{cases}$$

also

$$\begin{cases} x = c\,\mathfrak{Sin}\,\eta \sin\vartheta \cos\varphi, \\ y = c\,\mathfrak{Sin}\,\eta \sin\vartheta \sin\varphi, \\ z = c\,\mathfrak{Cof}\,\eta \cos\vartheta. \end{cases}$$

Die Flächen $\eta = \text{const}$ sind daher die verlängerten Drehellipsoide mit der Gleichung

$$\frac{x^2 + y^2}{c^2\,\mathfrak{Sin}^2\,\eta} + \frac{z^2}{c^2\,\mathfrak{Cof}^2\,\eta} = 1\,.$$

Sie entstehen durch Drehung von Ellipsen mit den Achsen $c\,\mathfrak{Cof}\,\eta$ und $c\,\mathfrak{Sin}\,\eta$ um die Z-Achse, wenn wir η auf positive Werte beschränken. Da

$$c^2\,\mathfrak{Cof}^2\,\eta - c^2\,\mathfrak{Sin}^2\,\eta = c^2$$

konstant ist, haben alle diese Ellipsen dieselben Brennpunkte, und zwar liegen diese auf der positiven und negativen Z-Achse im Abstand c vom Nullpunkt. Für $\eta = 0$ erhält man den zwischen den Brennpunkten gelegenen Teil der Z-Achse.

Die Flächen $\vartheta = \text{const}$ sind die zweischaligen Drehhyperboloide mit der Gleichung

$$-\frac{x^2 + y^2}{c^2 \sin^2\vartheta} + \frac{z^2}{c^2 \cos^2\vartheta} = 1\,.$$

Sie entstehen durch Drehung von Hyperbeln mit den Achsen $c \sin\vartheta$ und $|c \cos\vartheta|$, wenn wir ϑ auf die Werte zwischen 0 und π beschränken. Da

$$c^2 \sin^2\vartheta + c^2 \cos^2\vartheta = c^2$$

ist, haben diese Hyperbeln dieselben Brennpunkte wie die Ellipsen. Für $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \pi$ erhält man die außerhalb der Brennpunkte liegenden Teile der Z-Achse, für $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ die xy-Ebene. Den Werten von ϑ zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ entsprechen die Punkte mit positivem z, den zwischen $\frac{\pi}{2}$ und π diejenigen mit negativem z. Wir erhalten sämtliche Punkte des Raumes für $\eta \geq 0,\;\; 0 \leq \vartheta \leq \pi;\;\; 0 \leq \varphi < 2\pi$.

Aus (1) folgt gemäß den Formeln (7), (8) der vorigen Ziffer

$$f'(\eta + i\vartheta) = c\,\mathfrak{Sin}\,(\eta + i\vartheta),$$

$$f'(\eta + i\vartheta)\,f'(\eta - i\vartheta) = c^2\,(\mathfrak{Sin}^2\,\eta\,\cos^2\vartheta + \mathfrak{Cof}^2\,\eta\,\sin^2\vartheta)$$

$$= c^2\,(\mathfrak{Cof}^2\,\eta - \cos^2\vartheta) = c^2\,(\mathfrak{Sin}^2\,\eta + \sin^2\vartheta),$$

$$[f(\eta + i\vartheta) - f(\eta - i\vartheta)]^2 = -\,4\,c^2\,\mathfrak{Sin}^2\,\eta\,\sin^2\vartheta,$$

$$\frac{f'(\eta + i\vartheta)\,f'(\eta - i\vartheta)}{[f(\eta + i\vartheta) - f(\eta - i\vartheta)]^2} = -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\mathfrak{Sin}^2\,\eta} + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\right),$$

$$\chi_1(\eta) = -\frac{1}{4\,\mathfrak{Sin}^2\,\eta}, \qquad \chi_2(\vartheta) = -\frac{1}{4\sin^2\vartheta},$$

$$F_1(\eta) = \mathfrak{Ctg}\,\eta, \qquad F_2(\vartheta) = \operatorname{ctg}\vartheta,$$

daher nach (15·9), wenn wir $\alpha = -\,n(n+1)$ setzen,

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2H}{d\eta^2} + \mathfrak{Ctg}\,\eta\,\dfrac{dH}{d\eta} - \left[\dfrac{m^2}{\mathfrak{Sin}^2\,\eta} + n(n+1)\right] H = 0, \\[2ex] \dfrac{d^2\Theta}{d\vartheta^2} + \operatorname{ctg}\vartheta\,\dfrac{d\Theta}{d\vartheta} + \left[n(n+1) - \dfrac{m^2}{\sin^2\vartheta}\right]\Theta = 0. \end{cases}$$

Führen wir in die erste Gleichung (2) die Veränderliche $u = \mathfrak{Cof}\,\eta$ ein, so erhalten wir

$$\frac{dH}{d\eta} = \frac{dH}{du}\,\mathfrak{Sin}\,\eta,$$

$$\frac{d^2H}{d\eta^2} = \frac{d^2H}{du^2}\,\mathfrak{Sin}^2\eta + \frac{dH}{du}\,\mathfrak{Cof}\,\eta,$$

somit

$$(u^2 - 1)\,\frac{d^2H}{du^2} + 2\,u\,\frac{dH}{du} - \left[n(n+1) + \frac{m^2}{u^2 - 1}\right] H = 0,$$

daher nach (II·17) und (II·19) für H die Lösungen $\mathfrak{P}_n^m(\mathfrak{Cof}\,\eta)$ und $\mathfrak{Q}_n^m(\mathfrak{Cof}\,\eta)$.

Führen wir dagegen in die zweite Gleichung (2) die Veränderliche $u = \cos\vartheta$ ein, so erhalten wir

$$\frac{d\Theta}{d\vartheta} = -\frac{d\Theta}{du}\sin\vartheta,$$

$$\frac{d^2\Theta}{d\vartheta^2} = \frac{d^2\Theta}{du^2}\sin^2\vartheta - \frac{d\Theta}{du}\cos\vartheta,$$

somit

$$(1 - u^2)\,\frac{d^2\Theta}{du^2} - 2\,u\,\frac{d\Theta}{du} + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1 - u^2}\right]\Theta = 0$$

und nach (I·18) und (I·43) für Θ die Lösungen $P_n^m(\cos\vartheta)$ und $Q_n^m(\cos\vartheta)$.

Für die gewöhnlichen Anwendungen können wir uns auf $P_n^m(\cos\vartheta)$ und positive ganzzahlige m und n mit der Bedingung $0 \leqq m \leqq n$ beschränken. Für V ergeben sich damit die Lösungen $\mathfrak{P}_n^m(\mathfrak{Cof}\,\eta)\,P_n^m(\cos\vartheta)\,{\cos \atop \sin}\,m\varphi$ und $\mathfrak{Q}_n^m(\mathfrak{Cof}\,\eta)\,P_n^m(\cos\vartheta)\,{\cos \atop \sin}\,m\varphi$. Nach Ziffer (I·43) wird $\mathfrak{P}_n^m(\mathfrak{Cof}\,\eta)$ mit η unendlich, dagegen wird $\mathfrak{Q}_n^m(\mathfrak{Cof}\,\eta)$ unendlich für $\eta \to 0$. Innerhalb des Drehellipsoides $\eta = \eta_0$ wird man daher die erste der beiden Lösungen und außerhalb die zweite verwenden. Zur Berechnung von $\mathfrak{Q}_n^m(\mathfrak{Cof}\,\eta)$ dient die Formel (II, 14·9). Sie liefert

$$\mathfrak{Q}_n^m(\mathfrak{Cof}\,\eta) = (-1)^m \frac{2^{n+m+1}(n+m)!}{1\cdot 3\cdots(2n+1)}\,\mathfrak{Sin}^m\,\eta\, e^{-(n+m+1)\eta}$$
$$\times\, F\left(\frac{1}{2}+m,\ n+m+1,\ n+\frac{3}{2},\ e^{-2\eta}\right).$$

$\mathfrak{P}_n^m(\mathfrak{Cof}\,\eta)$ folgt aus Ziffer (I·43).

17. Abgeplattetes Drehellipsoid. Für die Funktion $f(\eta + i\vartheta)$ in (15·2) setzen wir jetzt

$$f(\eta + i\vartheta) = c\,\mathfrak{Sin}(\eta + i\vartheta), \tag{1}$$

wobei wieder $c > 0$ sein soll. Dann wird

$$\begin{cases} z = c\,\mathfrak{Sin}\,\eta\cos\vartheta, \\ \varrho = c\,\mathfrak{Cof}\,\eta\sin\vartheta, \end{cases}$$

also

$$\begin{cases} x = c\,\mathfrak{Cof}\,\eta\sin\vartheta\cos\varphi, \\ y = c\,\mathfrak{Cof}\,\eta\sin\vartheta\sin\varphi, \\ z = c\,\mathfrak{Sin}\,\eta\cos\vartheta. \end{cases}$$

Die Flächen $\eta = \text{const}$ sind daher die abgeplatteten Drehellipsoide mit der Gleichung

$$\frac{x^2+y^2}{c^2\,\mathfrak{Cof}^2\,\eta} + \frac{z^2}{c^2\,\mathfrak{Sin}^2\,\eta} = 1.$$

Sie entstehen durch Drehung von Ellipsen mit den Achsen $c\,\mathfrak{Cof}\,\eta$ und $c\,\mathfrak{Sin}\,\eta$ um die Z-Achse, wenn wir η auf positive Werte beschränken. Da $c^2\,\mathfrak{Cof}^2\,\eta - c^2\,\mathfrak{Sin}^2\,\eta = c^2$ ist, haben alle diese Ellipsen dieselben Brennpunkte. Diese Brennpunkte beschreiben bei der Drehung einen Kreis K vom Halbmesser c, sein Mittelpunkt liegt im Nullpunkt, er selbst in der xy-Ebene. Für $\eta = 0$ erhält man den von diesem Kreis begrenzten Teil der xy-Ebene. Die Flächen $\vartheta = \text{const}$ sind die einschaligen Drehhyperboloide mit der Gleichung

$$\frac{x^2+y^2}{c^2\sin^2\vartheta} - \frac{z^2}{c^2\cos^2\vartheta} = 1.$$

Sie entstehen durch Drehung von Hyperbeln mit den Achsen $c \sin\vartheta$ und $|c\cos\vartheta|$, wenn wir ϑ auf die Werte zwischen 0 und π beschränken. Da

$$c^2 \sin^2\vartheta + c^2\cos^2\vartheta = c^2$$

ist, haben diese Hyperbeln dieselben Brennpunkte wie die Ellipsen. Für $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \pi$ erhält man die Z-Achse, für $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ den außerhalb des Kreises K gelegenen Teil der xy-Ebene. Den Werten von ϑ zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ entsprechen die Punkte mit positivem z, denen zwischen $\frac{\pi}{2}$ und π diejenigen mit negativem z. Wir erhalten sämtliche Punkte des Raumes für $\eta \geqq 0$, $0 \leqq \vartheta \leqq \pi$, $0 \leqq \varphi < 2\pi$.

Aus (1) folgt gemäß den Formeln (7), (8) von Ziffer 15

$$f'(\eta + i\vartheta) = c \operatorname{Cof}(\eta + i\vartheta),$$

$$\begin{aligned} f'(\eta + i\vartheta) f'(\eta - i\vartheta) &= c^2(\operatorname{Cof}^2\eta \cos^2\vartheta + \operatorname{Sin}^2\eta \sin^2\vartheta) \\ &= c^2(\operatorname{Cof}^2\eta - \sin^2\vartheta) = c^2(\operatorname{Sin}^2\eta + \cos^2\vartheta), \end{aligned}$$

$$[f(\eta + i\vartheta) - f(\eta - i\vartheta)]^2 = -4c^2 \operatorname{Cof}^2\eta \sin^2\vartheta,$$

$$\frac{f'(\eta + i\vartheta) f'(\eta - i\vartheta)}{[f(\eta + i\vartheta) - f(\eta - i\vartheta)]^2} = -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sin^2\vartheta} - \frac{1}{\operatorname{Cof}^2\eta}\right),$$

$$\chi_1(\eta) = \frac{1}{4\operatorname{Cof}^2\eta}, \qquad \chi_2(\vartheta) = -\frac{1}{4\sin^2\vartheta},$$

$$F_1(\eta) = \operatorname{Tg}\eta, \qquad F_2(\vartheta) = \operatorname{ctg}\vartheta,$$

daher nach (15·9), wenn wir $\alpha = n(n+1)$ setzen,

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2 H}{d\eta^2} + \operatorname{Tg}\eta \dfrac{dH}{d\eta} + \dfrac{m^2}{\operatorname{Cof}^2\eta} H = n(n+1) H, \\[2ex] \dfrac{d^2\Theta}{d\vartheta^2} + \operatorname{ctg}\vartheta \dfrac{d\Theta}{d\vartheta} - \dfrac{m^2}{\sin^2\vartheta}\Theta = -n(n+1)\Theta. \end{cases}$$

Führen wir in die erste Gleichung (2) die Veränderliche $u = i \operatorname{Sin}\eta$ ein, so erhalten wir

$$\frac{dH}{d\eta} = i\frac{dH}{du}\operatorname{Cof}\eta,$$

$$\frac{d^2H}{d\eta^2} = -\frac{d^2H}{du^2}\operatorname{Cof}^2\eta + i\frac{dH}{du}\operatorname{Sin}\eta,$$

somit

$$(u^2 - 1)\frac{d^2H}{du^2} + 2u\frac{dH}{du} - \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-u^2}\right] H = 0,$$

daher nach (II·17) und (II·19) für H die Lösungen $\mathfrak{P}_n^m(i\operatorname{Sin}\eta)$ und $\mathfrak{Q}_n^m(i\operatorname{Sin}\eta)$. Führen wir dagegen in die zweite Gleichung (2) die Ver-

änderliche $u = \cos\vartheta$ ein, so ergeben sich wie in der vorigen Ziffer für Θ die Lösungen $P_n^m(\cos\vartheta)$ und $Q_n^m(\cos\vartheta)$.

Für die gewöhnlichen Anwendungen können wir uns auf $P_n^m(\cos\vartheta)$ und positive ganzzahlige m und n mit der Bedingung $0 \leqq m \leqq n$ beschränken. Für V ergeben sich damit die Lösungen

$$\mathfrak{P}_n^m(i\,\mathfrak{Sin}\,\eta)\,P_n^m(\cos\vartheta)\,{\cos \atop \sin}\,m\varphi \quad \text{und} \quad \mathfrak{Q}_n^m(i\,\mathfrak{Sin}\,\eta)\,P_n^m(\cos\vartheta)\,{\cos \atop \sin}\,m\varphi.$$

Nach Ziffer (15·3) ist das Bogenelement in einer Meridianebene $\varphi = \text{const}$ durch

$$dz^2 + d\varrho^2 = f'(\eta + i\vartheta)\,f'(\eta - i\vartheta)\,(d\eta^2 + d\vartheta^2) = c^2(\mathfrak{Sin}^2\eta + \cos^2\vartheta)\,(d\eta^2 + d\vartheta^2)$$

gegeben. Die Ableitung von $\mathfrak{Q}_n^m(i\,\mathfrak{Sin}\,\eta)\,P_n^m(\cos\vartheta)$ senkrecht zu den Flächen $\eta = \text{const}$ bzw. $\vartheta = \text{const}$ oder, in Vektorschreibweise, die Komponente des Gradienten dieser Funktion senkrecht zu den erwähnten Flächen ist daher nach (I·4)

$$(3) \qquad \frac{P_n^m(\cos\vartheta)}{c\sqrt{\mathfrak{Sin}^2\eta + \cos^2\vartheta}}\,\frac{d\,\mathfrak{Q}_n^m(i\,\mathfrak{Sin}\,\eta)}{d\eta} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\mathfrak{Q}_n^m(i\,\mathfrak{Sin}\,\eta)}{c\sqrt{\mathfrak{Sin}^2\eta + \cos^2\vartheta}}\,\frac{dP_n^m(\cos\vartheta)}{d\vartheta}.$$

Nach (I·13) und (I·18) enthält $P_n^m(\cos\vartheta)$ ein von Null verschiedenes konstantes Glied, wenn $n - m$ gerade ist; $\frac{P_n^m(\cos\vartheta)}{\cos\vartheta}$ wird daher unendlich für $\vartheta \to \frac{\pi}{2}$. Ferner ist

$$\frac{d\mathfrak{Q}_n^m(i\,\mathfrak{Sin}\,\eta)}{d\eta} = \frac{d\mathfrak{Q}_n^m(i\,\mathfrak{Sin}\,\eta)}{d(i\,\mathfrak{Sin}\,\eta)}\,i\,\mathfrak{Cof}\,\eta.$$

Es bleibt daher endlich für $\eta \to 0$, denn $\mathfrak{Q}_n^m(z)$ und seine Ableitungen sind endlich für $z = 0$. Der erste der Ausdrücke in (3) könnte daher unendlich werden für $\vartheta \to \frac{\pi}{2}$, $\eta \to 0$, wenn $n - m$ gerade ist.

Ist $n - m$ ungerade, so ist $P_n^m(\cos\vartheta)$ durch $\cos\vartheta$ teilbar, $\frac{P_n^m(\cos\vartheta)}{\cos\vartheta}$ bleibt daher endlich für $\vartheta \to \frac{\pi}{2}$. Nun ist aber

$$\frac{dP_n^m(\cos\vartheta)}{d\vartheta} = -\frac{dP_n^m(\xi)}{d\xi}\sin\vartheta \qquad (\xi = \cos\vartheta).$$

Da in diesem Fall das Polynom $P_n^{(m)}(\xi)$ ein Glied mit ξ enthält, kommt in $P_n^{(m+1)}(\xi)$ ein von Null verschiedenes konstantes Glied vor. Nun ist

$$P_n^m(\xi) = (-1)^m(1 - \xi^2)^{\frac{m}{2}}\,P_n^{(m)}(\xi),$$

daher

$$\frac{dP_n^m(\xi)}{d\xi} = (-1)^{m+1}\,m(1 - \xi^2)^{\frac{m}{2}-1}\,\xi\,P_n^{(m)}(\xi) + (-1)^m(1 - \xi^2)^{\frac{m}{2}}\,P_n^{(m+1)}(\xi).$$

Für $\xi = 0 \left(\vartheta = \frac{\pi}{2}\right)$ ist also $\frac{dP_n^m(\xi)}{d\xi}$ und damit auch $\frac{dP_n^m(\cos\vartheta)}{d\vartheta}$ endlich und von Null verschieden. Da aber $\frac{1}{\sqrt{\mathfrak{Sin}^2\eta + \cos^2\vartheta}}$ für $\vartheta \to \frac{\pi}{2}$, $\eta \to 0$ unendlich wird und $\mathfrak{Q}_n^m(i\,\mathfrak{Sin}\,\eta)$ dabei endlich bleibt, könnte in diesem Fall der zweite der beiden Ausdrücke (3) unendlich werden.

$\mathfrak{Q}_n^m(i\,\mathfrak{Sin}\,\eta)\,P_n^m(\cos\vartheta)$ hat also für $\eta = 0$, $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, d. h. auf dem Kreis K Ableitungen, die unendlich groß werden könnten. Innerhalb eines Ellipsoides $\eta = \eta_0$ kommt daher als Lösung

$$\mathfrak{P}_n^m(i\,\mathfrak{Sin}\,\eta)\,P_n^m(\cos\vartheta)\,{}^{\cos}_{\sin}\,m\varphi$$

in Betracht, außerhalb nur $\mathfrak{Q}_n^m(i\,\mathfrak{Sin}\,\eta)\,P_n^m(\cos\vartheta)\,{}^{\cos}_{\sin}\,m\varphi$, denn $\mathfrak{P}_n^m(i\,\mathfrak{Sin}\,\eta)$ wird mit η unendlich groß. Die Verwendung der Kugelfunktionen zur Lösung der Potentialgleichung in Randwertaufgaben bei Drehellipsoiden geht auf G. LAMÉ[1]) und E. HEINE[2]) zurück.

18. Orthogonale Kreisbüschel. Wenn wir im Dreieck ABP (Abb. 45) den Winkel bei P halbieren, so trifft die Halbierungslinie die Seite AB

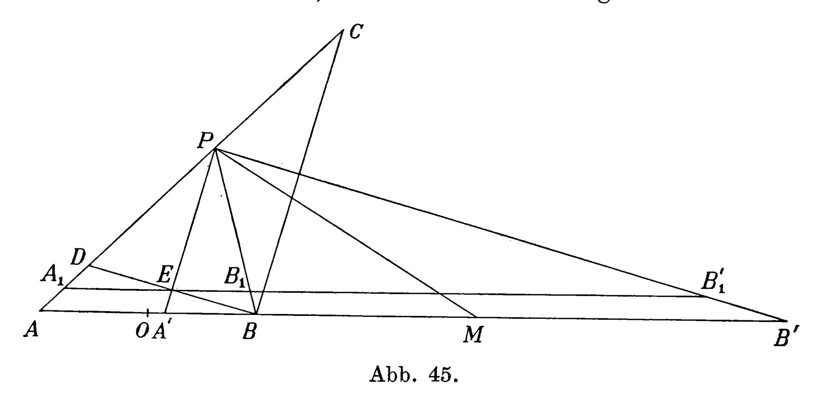


Abb. 45.

im Punkt A'. Wir ziehen $BC \parallel PA'$ und $PB' \perp BC$. Dann halbiert PB' den Außenwinkel BPC, und es ist $\overline{PB} = \overline{PC}$, somit $\overline{AA'} : \overline{A'B} = \overline{AP} : \overline{PC} = \overline{AP} : \overline{PB}$ und ebenso, wenn wir noch $BD \parallel PB'$ ziehen, $BD \perp PA'$, daher $\overline{PB} = \overline{PD}$ und $\overline{AB'} : \overline{BB'} = \overline{AP} : \overline{PD} = \overline{AP} : \overline{PB}$. Wir halbieren die Strecke $\overline{A'B'}$ durch den Punkt M und beschreiben um M einen Kreis K, der durch die Punkte A' und B' geht. Weil der Winkel $A'PB'$ ein rechter ist, geht der Kreis auch durch den Punkt P.

---

[1]) G. LAMÉ, J. Math. pur. appl. 4 (1839), 351.

[2]) Siehe Fußnoten in (I·19) und (II·32) und J. reine angew. Math. 26 (1843).

Wir hatten erhalten

(1) $$\overline{AA'} : \overline{A'B} = \overline{AB'} : \overline{BB'}.$$

Wir gehen nun umgekehrt von vier solchen Punkten einer Geraden aus, halbieren die Strecke $\overline{A'B'}$ in M, schlagen um M als Mittelpunkt den Kreis K mit dem Halbmesser $\overline{MA'} = \overline{MB'}$ und wählen auf ihm einen beliebigen Punkt P. Dann ist der Winkel $A'PB'$ ein rechter. Wir ziehen $BD \| B'P$ und durch den Schnittpunkt E von $A'P$ und BD die Parallele zu AB'. Sie trifft AP in A_1, BP in B_1, $B'P$ in B_1'. Dann gilt

$$\overline{A_1E} : \overline{EB_1} = \overline{AA'} : \overline{A'B},$$
$$\overline{A_1B_1'} : \overline{B_1B_1'} = \overline{AB'} : \overline{BB'},$$

also wegen (1)

(2) $$\overline{A_1E} : \overline{EB_1} = \overline{A_1B_1'} : \overline{B_1B_1'}.$$

Ferner ist

$$\overline{DE} : \overline{PB_1'} = \overline{A_1E} : \overline{A_1B_1'},$$
$$\overline{BE} : \overline{PB_1'} = \overline{EB_1} : \overline{B_1B_1'},$$

somit

$$\overline{DE} = \overline{BE} \quad \text{wegen (2).}$$

Danach ist $\triangle DPE \cong \triangle PEB$, weil $BD \perp PA'$ ist, also halbiert PA' den Winkel APB und PB' als Normale auf PA' den Außenwinkel BPC. Dann ist aber nach den Überlegungen am Anfang dieser Ziffer $\overline{AP} : \overline{PB} = \overline{AA'} : \overline{A'B}$. Die Punkte des Kreises um M haben also die Eigenschaft, daß das Verhältnis ihrer Abstände von den beiden festen Punkten A und B konstant ist, nämlich gleich dem festen Verhältnis $\overline{AA'} : \overline{A'B} = \overline{AB'} : \overline{BB'}$. Dieses Verhältnis läßt sich auch so schreiben $(\overline{AM} - \overline{A'M}) : (\overline{A'M} - \overline{BM}) = (\overline{AM} + \overline{MB'}) : (\overline{BM} + \overline{MB'})$, woraus wegen $\overline{A'M} = \overline{MB'} = \overline{PM}$ folgt

(3) $$\overline{AM} \cdot \overline{BM} = \overline{PM}^2.$$

Legen wir daher durch die Punkte A, B, P einen Kreis K', so folgt aus dem Sehnentangentensatz des Kreises zufolge der letzten Beziehung, daß PM Tangente an den Kreis K' ist. Die beiden Kreise K und K' schneiden sich also rechtwinklig. Lassen wir den Punkt P den ganzen Kreis K durchlaufen, so erhalten wir jedesmal einen anderen Kreis K'. Alle diese Kreise K' gehen durch die festen Punkte A und B, bilden also ein Kreisbüschel und werden sämtlich von dem Kreis K unter rechten Winkeln geschnitten. Lassen wir dagegen den Punkt P den ganzen Kreis K' durchlaufen, so erhalten wir jedesmal einen anderen senkrecht schneidenden Kreis K mit

dem Mittelpunkt M auf der Geraden AB. Der Mittelpunkt M wird einfach dadurch gefunden, daß man in P an den Kreis K' die Tangente legt und sie mit der Geraden AB zum Schnitt bringt. Wir erhalten somit zwei Kreisbüschel; das eine besteht aus allen Kreisen durch die festen Punkte A und B, das andere aus allen Kreisen, welche sämtliche Kreise des ersten Büschels senkrecht schneiden. Die Mittelpunkte dieser Kreise liegen auf der Geraden AB. Dieses Kreisbüschel besteht aus zwei Systemen, die spiegelbildlich zur Mittelsenkrechten von $\overline{AB}$ liegen.

Aus (3) folgt die Ähnlichkeit der Dreiecke AMP und PMB und daraus und (3)

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{PM}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{MA}}{\overline{PM}} = \sqrt{\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}}.$$

Wir setzen $\lambda = \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$ und führen noch den Winkel $APB = \vartheta$ ein. Für alle Punkte eines Kreises K ist λ, für alle Punkte eines Kreises K' dagegen ϑ konstant, soweit sie auf derselben Seite von $\overline{AB}$ liegen.

Wir erhalten alle Kreise K, wenn wir λ alle positiven Werte durchlaufen lassen; für $\lambda = 0$ schrumpfen diese Kreise auf den Punkt A zusammen, für $\lambda = 1$ erhalten wir die Mittelsenkrechte von $\overline{AB}$, für $\lambda \to +\infty$ schrumpfen sie auf den Punkt B zusammen. $\lambda < 1$ liefert die Kreise der linken Seite, $\lambda > 1$ die der rechten Seite.

Um alle Kreise K' zu erhalten, haben wir ϑ alle Werte von 0 bis π durchlaufen zu lassen. Für Punkte P oberhalb der Geraden AB wächst ϑ von 0 bis $\frac{\pi}{2}$, wenn der Mittelpunkt des betreffenden Kreises aus dem Unendlichen oberhalb AB bis zur Mitte O der Strecke $\overline{AB}$ rückt, und von $\frac{\pi}{2}$ bis π, sobald der Mittelpunkt sich unterhalb AB wieder ins Unendliche entfernt. Für die Punkte P unterhalb der Geraden AB ist der Winkel APB dann durch $\pi - \vartheta$ oder, wenn wir seine Ergänzung auf 2π wählen, ihn also in demselben Sinn wie oberhalb AB zählen, durch $\pi + \vartheta$ gegeben. Verstehen wir demnach unter ϑ immer den in diesem Sinn gerechneten Winkel APB, so wächst ϑ für die Punkte P unterhalb AB von π bis 2π.

19. Ringkoordinaten. Lassen wir das ganze System von Kreisen um die Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{AB}$ rotieren, so entstehen aus den Kreisen K' Kugeln, aus den Kreisen K Kreiswülste, Ringe (Torus), die von den Kugeln rechtwinklig geschnitten werden. Um zu einem dreifach orthogonalen Flächensystem zu gelangen, brauchen wir nur noch die Ebenen durch die Drehachse einzuführen. Wir werden den Nullpunkt

in den Mittelpunkt O von $\overline{AB}$, die Z-Achse in die Drehachse legen und die Ebenen durch die Drehachse durch den Winkel φ kennzeichnen, den sie mit der xz-Ebene einschließen $(0 \leqq \varphi < 2\pi)$. Dann müssen wir aber λ auf die Werte $\geqq 1$ beschränken, da der rechts von der Drehachse gelegene Teil durch die Drehung, d. h. durch die Änderung des Winkels φ einmal auch auf die linke Seite kommt. Wir erhalten also für $\lambda \geqq 1$, $0 \leqq \vartheta \leqq 2\pi$, $0 \leqq \varphi < 2\pi$ jeden Punkt des Raumes. Diese Koordinaten wurden von C. NEUMANN[1]) eingeführt.

Aus dem Dreieck ABP lesen wir ab: Der doppelte Flächeninhalt ist, wenn wir $\overline{AO} = \overline{OB} = c$ setzen, $2cz$, denn die Höhe ist das Lot von P auf AB, also die z-Koordinate von P. Drücken wir dagegen den Flächeninhalt durch die Seiten aus, so ergibt sich

$$2cz = \overline{AP} \cdot \overline{BP} \sin \vartheta,$$

und diese Formel gilt, wie man leicht sich klarmachen kann, auch unterhalb der xy-Ebene. Der Kosinussatz liefert in beiden Fällen

$$\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 = 4c^2 + 2\,\overline{AP} \cdot \overline{BP} \cos \vartheta.$$

Wir führen noch $\ln \lambda = \eta$ ein; η durchläuft somit alle positiven Werte. Nun ist

$$\overline{AP} = \lambda \cdot \overline{BP},$$

daher

$$2cz = \lambda \cdot \overline{BP}^2 \sin \vartheta,$$

$$(\lambda^2 + 1)\,\overline{BP}^2 = 4c^2 + 2\lambda\,\overline{BP}^2 \cos \vartheta,$$

somit

$$\overline{BP}^2 = \frac{4c^2}{\lambda^2 + 1 - 2\lambda \cos \vartheta},$$

$$z = \frac{2c\lambda \sin \vartheta}{\lambda^2 + 1 - 2\lambda \cos \vartheta} = \frac{c \sin \vartheta}{\mathfrak{Cof}\,\eta - \cos \vartheta},$$

$$\overline{AP} \cdot \overline{BP} = \frac{2c^2}{\mathfrak{Cof}\,\eta - \cos \vartheta}.$$

Wir fällen von P das Lot auf AB, sein Fußpunkt sei Q, für $\overline{OQ}$ schreiben wir ϱ. Dann ist

$$\begin{cases} \overline{AP}^2 = (c + \varrho)^2 + z^2, \\ \overline{BP}^2 = (c - \varrho)^2 + z^2, \end{cases}$$

also

$$\overline{AP}^2 - \overline{BP}^2 = 4c\varrho,$$

[1]) C. NEUMANN, Theorie der Elektrizität und Wärmeverteilung in einem Ring, Halle 1864.

demnach

$$\varrho = \frac{\overline{AP^2} - \overline{BP^2}}{4c} = \frac{\overline{BP^2}(\lambda^2 - 1)}{4c}$$

$$= \frac{c(\lambda^2 - 1)}{\lambda^2 + 1 - 2\lambda\cos\vartheta} = \frac{c\,\mathfrak{Sin}\,\eta}{\mathfrak{Cof}\,\eta - \cos\vartheta}.$$

Das Bogenelement des Raumes in den hier eingeführten Zylinderkoordinaten ϱ, φ, z ist nach Ziffer 15

$$ds^2 = d\varrho^2 + dz^2 + \varrho^2\,d\varphi^2.$$

Wir erhalten

$$d\varrho = \frac{c\,[(\mathfrak{Cof}\,\eta - \cos\vartheta)\,\mathfrak{Cof}\,\eta\,d\eta - \mathfrak{Sin}\,\eta\,(\mathfrak{Sin}\,\eta\,d\eta + \sin\vartheta\,d\vartheta)]}{(\mathfrak{Cof}\,\eta - \cos\vartheta)^2}$$

$$= \frac{c\,[(1 - \mathfrak{Cof}\,\eta\cos\vartheta)\,d\eta - \mathfrak{Sin}\,\eta\sin\vartheta\,d\vartheta]}{(\mathfrak{Cof}\,\eta - \cos\vartheta)^2},$$

$$dz = \frac{c\,[(\mathfrak{Cof}\,\eta - \cos\vartheta)\cos\vartheta\,d\vartheta - \sin\vartheta\,(\mathfrak{Sin}\,\eta\,d\eta + \sin\vartheta\,d\vartheta)]}{(\mathfrak{Cof}\,\eta - \cos\vartheta)^2}$$

$$= -\frac{c\,[\mathfrak{Sin}\,\eta\sin\vartheta\,d\eta + (1 - \mathfrak{Cof}\,\eta\cos\vartheta)\,d\vartheta]}{(\mathfrak{Cof}\,\eta - \cos\vartheta)^2},$$

$$ds^2 = \frac{c^2}{(\mathfrak{Cof}\,\eta - \cos\vartheta)^2}\,(d\eta^2 + d\vartheta^2 + \mathfrak{Sin}^2\,\eta\,d\varphi^2),$$

daher nach (I, 2·9) und (I, 4·1)

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\mathfrak{Sin}\,\eta}{\mathfrak{Cof}\,\eta - \cos\vartheta}\,\frac{\partial V}{\partial\eta}\right) + \frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\frac{\mathfrak{Sin}\,\eta}{\mathfrak{Cof}\,\eta - \cos\vartheta}\,\frac{\partial V}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{(\mathfrak{Cof}\,\eta - \cos\vartheta)\,\mathfrak{Sin}\,\eta}\,\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2} = 0.$$

Wir führen nun $V = U\sqrt{\mathfrak{Cof}\,\eta - \cos\vartheta}$ ein und erhalten

$$\frac{\partial V}{\partial\eta} = \frac{\partial U}{\partial\eta}\sqrt{\mathfrak{Cof}\,\eta - \cos\vartheta} + \frac{U\,\mathfrak{Sin}\,\eta}{2\sqrt{\mathfrak{Cof}\,\eta - \cos\vartheta}},$$

$$\frac{\partial V}{\partial\vartheta} = \frac{\partial U}{\partial\vartheta}\sqrt{\mathfrak{Cof}\,\eta - \cos\vartheta} + \frac{U\sin\vartheta}{2\sqrt{\mathfrak{Cof}\,\eta - \cos\vartheta}},$$

also

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{\mathfrak{Sin}\,\eta}{(\mathfrak{Cof}\,\eta - \cos\vartheta)^{\frac{1}{2}}}\,\frac{\partial U}{\partial\eta} + \frac{U\,\mathfrak{Sin}^2\,\eta}{2\,(\mathfrak{Cof}\,\eta - \cos\vartheta)^{\frac{3}{2}}}\right]$$

$$+ \frac{\partial}{\partial\vartheta}\left[\frac{\mathfrak{Sin}\,\eta}{(\mathfrak{Cof}\,\eta - \cos\vartheta)^{\frac{1}{2}}}\,\frac{\partial U}{\partial\vartheta} + \frac{U\,\mathfrak{Sin}\,\eta\,\sin\vartheta}{2\,(\mathfrak{Cof}\,\eta - \cos\vartheta)^{\frac{3}{2}}}\right]$$

$$+ \frac{1}{(\mathfrak{Cof}\,\eta - \cos\vartheta)^{\frac{1}{2}}\,\mathfrak{Sin}\,\eta}\,\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2} = 0$$

oder

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\eta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial\vartheta^2} + \frac{1}{\mathfrak{Sin}^2\,\eta}\,\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2} + \mathfrak{Ctg}\,\eta\,\frac{\partial U}{\partial\eta} + \frac{1}{4}\,U = 0.$$

Wie in Ziffer 15 setzen wir $U = H\Theta\Phi$, wobei H nur von η, Θ nur von ϑ und Φ nur von φ abhängen soll, und erhalten

$$\frac{1}{H}\frac{d^2H}{d\eta^2} + \frac{1}{\Theta}\frac{d^2\Theta}{d\vartheta^2} + \frac{1}{\mathfrak{Sin}^2\eta}\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + \frac{\mathfrak{Ctg}\,\eta}{H}\frac{dH}{d\eta} + \frac{1}{4} = 0.$$

Es muß daher $\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}$ konstant oder $\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + m^2\Phi = 0$ (m fest) und ebenso $\frac{1}{\Theta}\frac{d^2\Theta}{d\vartheta^2}$ konstant oder $\frac{d^2\Theta}{d\vartheta^2} + n^2\Theta = 0$ (n fest) sein. Dann bleibt noch

$$\frac{d^2H}{d\eta^2} + \mathfrak{Ctg}\,\eta\frac{dH}{d\eta} - \left(n^2 - \frac{1}{4} + \frac{m^2}{\mathfrak{Sin}^2\eta}\right)H = 0.$$

Nach (II·17) und (II·19) ergeben sich dafür, wenn man, wie in Ziffer 16, die Veränderliche $u = \mathfrak{Cof}\,\eta$ einführt, die Lösungen

$$\mathfrak{P}^m_{n-\frac{1}{2}}(\mathfrak{Cof}\,\eta) \quad \text{und} \quad \mathfrak{Q}^m_{n-\frac{1}{2}}(\mathfrak{Cof}\,\eta),$$

daher für V die Lösungen

(1)
$$\begin{cases} \sqrt{\mathfrak{Cof}\,\eta - \cos\vartheta}\;\mathfrak{P}^m_{n-\frac{1}{2}}(\mathfrak{Cof}\,\eta)\,{\cos \atop \sin} n\vartheta\,{\cos \atop \sin} m\varphi \quad \text{und} \\ \sqrt{\mathfrak{Cof}\,\eta - \cos\vartheta}\;\mathfrak{Q}^m_{n-\frac{1}{2}}(\mathfrak{Cof}\,\eta)\,{\cos \atop \sin} n\vartheta\,{\cos \atop \sin} m\varphi. \end{cases}$$

Für die Fragen der Potentialtheorie, in denen die Berandungen Oberflächen von Kreiswülsten sind, müssen die Lösungen in ϑ und φ periodisch, daher m und n positive ganze Zahlen sein. Die hier auftretenden Kugelfunktionen mit den Zeigern $n - \frac{1}{2}$ und m nennt man, weil sie bei den Randwertproblemen eines Ringes oder Torus auftreten, auch **toroidale** oder **Ringfunktionen**. Sie wurden von C. NEUMANN eingeführt.

20. Ringfunktionen im Äußern des Ringes. $\eta = \eta_0$ stellt einen bestimmten Ring dar. Im Außengebiet ist $0 \leqq \eta < \eta_0$, im Innengebiet $\eta_0 < \eta$ (einschließlich $\eta \to +\infty$). Für $\eta = 0$ wird $\sqrt{\mathfrak{Cof}\,\eta - \cos\vartheta}\;\mathfrak{P}^m_{n-\frac{1}{2}}(\mathfrak{Cof}\,\eta)$ nach (II, 32·4)

$$\sqrt{1-\cos\vartheta}\;\mathfrak{P}^m_{n-\frac{1}{2}}(1) = \sqrt{1-\cos\vartheta}\,\frac{\Gamma\left(n+m+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos m\varphi\,d\varphi$$

$$= \begin{cases} \left(n+\frac{1}{2}\right)\left(n+\frac{3}{2}\right)\cdots\left(n+m-\frac{1}{2}\right)\sqrt{1-\cos\vartheta} & \text{für } m = 0, \\ 0 & \text{für } m \neq 0, \end{cases}$$

bleibt also endlich. Ferner liefert (II, 19·5)

$$\mathfrak{Q}_{n-\frac{1}{2}}^m(z) = \frac{(-1)^m \sqrt{\pi}}{2^{n+\frac{1}{2}}} \frac{\Gamma\left(n+m+\frac{1}{2}\right)}{n!\, z^{n-m+\frac{1}{2}} (z^2-1)^{\frac{m}{2}}} \times F\left(\frac{n-m}{2}+\frac{3}{4},\ \frac{n-m}{2}+\frac{1}{4},\ n+1,\ \frac{1}{z^2}\right);$$

nach (II, 11·3) ist

$$F\left(\frac{n-m}{2}+\frac{3}{4},\ \frac{n-m}{2}+\frac{1}{4},\ n+1,\ 1\right) = \frac{\Gamma(n+1)\,\Gamma(m)}{\Gamma\left(\frac{n+m}{2}+\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{n+m}{2}+\frac{3}{4}\right)},$$

somit wird $\mathfrak{Q}_{n-\frac{1}{2}}^m(z)$ für $z \to 1$ unendlich, also auch $\mathfrak{Q}_{n-\frac{1}{2}}^m(\mathfrak{Cof}\,\eta)$ für $\eta \to 0$.

Für den Außenraum eines Ringes kommen danach nur die Lösungen

$$\sqrt{\mathfrak{Cof}\,\eta - \cos\vartheta}\, \mathfrak{P}_{n-\frac{1}{2}}^m(\mathfrak{Cof}\,\eta) \,{\cos \atop \sin}\, n\vartheta \,{\cos \atop \sin}\, m\varphi$$

in Betracht.

21. Ringfunktionen im Innern des Ringes. Im Innengebiet müssen wir das Verhalten von $\mathfrak{P}_{n-\frac{1}{2}}^m(z)$ und $\mathfrak{Q}_{n-\frac{1}{2}}^m(z)$ für $z \to +\infty$ untersuchen. Zu diesem Zweck gehen wir von der Formel (II, 19·4) aus. Es ist für positive ganzzahlige m nach (II, 8·6) und (II, 4)

$$(1)\qquad \mathfrak{Q}_n^m(z) = \frac{(-1)^m \sqrt{\pi}}{2^{n+1}} \frac{\Gamma(n+m+1)}{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)} (z^2-1)^{\frac{m}{2}} z^{-n-m-1} \times F\left(\frac{n+m+2}{2},\ \frac{n+m+1}{2},\ n+\frac{3}{2},\ \frac{1}{z^2}\right)$$

$$= \frac{(-1)^m \sqrt{\pi}}{(2z)^{n+1}} \frac{(z^2-1)^{\frac{m}{2}}}{z^m} \frac{\Gamma(n+m+1)}{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)} \left[1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{n+m}{2}+1\right)\left(\frac{n+m}{2}+2\right)\cdots\left(\frac{n+m}{2}+\nu\right)\frac{n+m+1}{2}\,\frac{n+m+3}{2}\cdots\frac{n+m+2\nu}{2}}{\nu!\left(n+\frac{3}{2}\right)\left(n+\frac{5}{2}\right)\cdots\left(n+\frac{2\nu+1}{2}\right) z^{2\nu}}\right]$$

$$= \frac{(-1)^m \sqrt{\pi}}{(2z)^{n+1}} \frac{(z^2-1)^{\frac{m}{2}}}{z^m} \frac{\Gamma(n+m+1)}{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)} \left[1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(n+m+1)(n+m+2)\cdots(n+m+2\nu)}{\nu!\left(n+\frac{3}{2}\right)\left(n+\frac{5}{2}\right)\cdots\left(n+\nu+\frac{1}{2}\right)(2z)^{2\nu}}\right]$$

$$= \frac{(-1)^m \sqrt{\pi}}{(2z)^{n+1}} \frac{(z^2-1)^{\frac{m}{2}}}{z^m} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+m+2\nu+1)}{\nu!\,\Gamma\left(n+\nu+\frac{3}{2}\right)(2z)^{2\nu}},$$

daher

$$(2)\qquad \mathfrak{Q}^m_{-n-1}(z) = (-1)^m \sqrt{\pi}\,(2z)^n \frac{(z^2-1)^{\frac{m}{2}}}{z^m} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\Gamma(m-n+2\nu)}{\nu!\,\Gamma\left(\nu-n+\frac{1}{2}\right)(2z)^{2\nu}}.$$

Schreiben wir $n-\frac{1}{2}+\varepsilon$ statt n, wobei jetzt n positiv ganzzahlig oder Null sein soll, so wird aus (1)

$$(3)\qquad \mathfrak{Q}^m_{n-\frac{1}{2}+\varepsilon}(z) = \frac{(-1)^m\sqrt{\pi}}{(2z)^{n+\frac{1}{2}+\varepsilon}} \frac{(z^2-1)^{\frac{m}{2}}}{z^m} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(n+m+\frac{1}{2}+2\nu+\varepsilon\right)}{\nu!\,\Gamma(n+1+\nu+\varepsilon)(2z)^{2\nu}}$$

und aus (2)

$$(4)\qquad \mathfrak{Q}^m_{-n-\frac{1}{2}-\varepsilon}(z) = (-1)^m \sqrt{\pi}\,(2z)^{n-\frac{1}{2}+\varepsilon} \frac{(z^2-1)^{\frac{m}{2}}}{z^m} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(m-n+\frac{1}{2}+2\nu-\varepsilon\right)}{\nu!\,\Gamma(\nu-n+1-\varepsilon)(2z)^{2\nu}}.$$

Die ersten n Glieder dieser Reihe, also von $\nu=0$ bis $\nu=n-1$, verschwinden für $\varepsilon=0$ nach (II·2). Für die übrigen erhält man

$$(5)\qquad \sum_{\nu=n}^{\infty} \frac{\Gamma\left(m-n+\frac{1}{2}+2\nu-\varepsilon\right)}{\nu!\,\Gamma(\nu-n+1-\varepsilon)(2z)^{2\nu}} = \frac{1}{(2z)^{2n}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(m+n+\frac{1}{2}+2\nu-\varepsilon\right)}{(n+\nu)!\,\Gamma(\nu+1-\varepsilon)(2z)^{2\nu}}.$$

Aus (3), (4), (5) ergibt sich daher für $\varepsilon=0$ bei positiven ganzzahligen m und n (0 eingeschlossen)

$$(6)\qquad \mathfrak{Q}^m_{n-\frac{1}{2}}(z) = \mathfrak{Q}^m_{-n-\frac{1}{2}}(z)$$

$$= \frac{(-1)^m\sqrt{\pi}}{(2z)^{n+\frac{1}{2}}} \frac{(z^2-1)^{\frac{m}{2}}}{z^m} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(n+m+\frac{1}{2}+2\nu\right)}{\nu!\,(n+\nu)!\,(2z)^{2\nu}}$$

$$= (-1)^m \pi \left(1-\frac{1}{z^2}\right)^{\frac{m}{2}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdots(2n+2m+4\nu-1)}{2^{n+m+2\nu}\,\nu!\,(n+\nu)!\,(2z)^{n+2\nu+\frac{1}{2}}}.$$

Um auch eine Formel für $\mathfrak{P}^m_{n-\frac{1}{2}}(z)$ zu erhalten, gehen wir von (II, 22·2) aus. Es ist dann

$$(7)\qquad \mathfrak{P}^m_{n-\frac{1}{2}+\varepsilon}(z) = \frac{(-1)^{m+n}}{\pi\cos\left(\varepsilon-\frac{1}{2}\right)\pi}\Big[\mathfrak{Q}^m_{n-\frac{1}{2}+\varepsilon}(z)\sin\left(n-\frac{1}{2}+m+\varepsilon\right)\pi$$

$$-\,\mathfrak{Q}^m_{-n-\frac{1}{2}-\varepsilon}(z)\sin\left(n-\frac{1}{2}-m+\varepsilon\right)\pi\Big],$$

somit für $\varepsilon \to 0$

$$(8)\quad \mathfrak{P}^m_{n-\frac{1}{2}}(z) = \frac{(-1)^{m+n}}{\pi^2}\frac{d}{d\varepsilon}\left[\mathfrak{Q}^m_{n-\frac{1}{2}+\varepsilon}(z)\sin\left(n-\frac{1}{2}+m+\varepsilon\right)\pi - \mathfrak{Q}^m_{-n-\frac{1}{2}-\varepsilon}(z)\sin\left(n-\frac{1}{2}-m+\varepsilon\right)\pi\right]_{\varepsilon=0}.$$

Wir haben also (3) und (4) nach ε zu differenzieren. Die gliedweise Differentiation ist möglich, wenn die Summen bezüglich ε gleichmäßig konvergieren, weil die einzelnen Glieder nach (II·2) analytische Funktionen von ε sind. Die gleichmäßige Konvergenz läßt sich folgendermaßen beweisen. Der Quotient zweier unmittelbar aufeinanderfolgender Glieder der Reihe (3) ist

$$\frac{u_{\nu+1}}{u_\nu} = \frac{\left(n+m+\frac{1}{2}+2\nu+\varepsilon\right)\left(n+m+\frac{1}{2}+2\nu+1+\varepsilon\right)}{(2z)^2(\nu+1)(n+1+\nu+\varepsilon)},$$

daher für $|\varepsilon| \leqq \delta$

$$\left|\frac{u_{\nu+1}}{u_\nu}\right| \leqq \frac{\left(n+m+\frac{1}{2}+2\nu+\delta\right)\left(n+m+\frac{1}{2}+2\nu+1+\delta\right)}{4|z|^2(\nu+1)(n+1+\nu-\delta)} \leqq q < 1$$

für alle genügend großen $|z|$, für alle $\nu > N$, wobei q von ε nicht mehr abhängt und N entsprechend groß ist; somit ist

$$|u_{N+1}| + |u_{N+2}| + |u_{N+3}| + \cdots \leqq |u_{N+1}|(1+q+q^2+\cdots),$$

d. h. die Reihe konvergiert absolut und gleichmäßig. Für die Reihe (4) erhält man ebenso

$$\left|\frac{u_{\nu+1}}{u_\nu}\right| = \left|\frac{\left(m-n+\frac{1}{2}+2\nu-\varepsilon\right)\left(m-n+\frac{1}{2}+2\nu+1-\varepsilon\right)}{(2z)^2(\nu+1)(\nu-n+1-\varepsilon)}\right|$$

$$\leqq \frac{\left(m-n+\frac{1}{2}+2\nu+\delta\right)\left(m-n+\frac{1}{2}+2\nu+1+\delta\right)}{4|z|^2(\nu+1)(\nu-n+1-\delta)} \leqq q < 1$$

und daher dasselbe Ergebnis. Aus (3) folgt also durch Differentiation

$$(9)\quad \left[\frac{d}{d\varepsilon}\mathfrak{Q}^m_{n-\frac{1}{2}+\varepsilon}(z)\right]_{\varepsilon=0}$$

$$= \frac{(-1)^m\sqrt{\pi}}{(2z)^{n+\frac{1}{2}}}\frac{(z^2-1)^{\frac{m}{2}}}{z^m}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(n+m+\frac{1}{2}+2\nu\right)}{\nu!\,(n+\nu)!\,(2z)^{2\nu}}\left[-\ln(2z) + \frac{\Gamma'\left(n+m+\frac{1}{2}+2\nu\right)}{\Gamma\left(n+m+\frac{1}{2}+2\nu\right)} - \frac{\Gamma'(n+1+\nu)}{\Gamma(n+1+\nu)}\right],$$

aus (4) und (5)

$$(10)\qquad \left[\frac{d}{d\varepsilon}\mathfrak{Q}^m_{-n-\frac{1}{2}-\varepsilon}(z)\right]_{\varepsilon=0}$$

$$= (-1)^m \sqrt{\pi}\,(2z)^{n-\frac{1}{2}} \frac{(z^2-1)^{\frac{m}{2}}}{z^m} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(m-n+\frac{1}{2}+2\nu\right)}{\nu!\,\Gamma(\nu-n+1)\,(2z)^{2\nu}} \left[\ln(2z) - \frac{\Gamma'\left(m-n+\frac{1}{2}+2\nu\right)}{\Gamma\left(m-n+\frac{1}{2}+2\nu\right)} + \frac{\Gamma'(\nu-n+1)}{\Gamma(\nu-n+1)}\right]$$

$$= \frac{(-1)^m\sqrt{\pi}}{(2z)^{n+\frac{1}{2}}} \frac{(z^2-1)^{\frac{m}{2}}}{z^m} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(m+n+\frac{1}{2}+2\nu\right)}{(n+\nu)!\,\nu!\,(2z)^{2\nu}} \left[\ln(2z) - \frac{\Gamma'\left(m+n+\frac{1}{2}+2\nu\right)}{\Gamma\left(m+n+\frac{1}{2}+2\nu\right)} + \frac{\Gamma'(\nu+1)}{\Gamma(\nu+1)}\right]$$

$$+ (-1)^m \sqrt{\pi}\,(2z)^{n-\frac{1}{2}} \frac{(z^2-1)^{\frac{m}{2}}}{z^m} \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{\Gamma\left(m-n+\frac{1}{2}+2\nu\right)}{\nu!\,(2z)^{2\nu}} (-1)^{n-\nu}(n-\nu-1)!\,.$$

Aus (II·2) folgt nämlich für jedes positive ganzzahlige k (Null eingeschlossen)

$$\Gamma(z) = \frac{(-1)^k}{k!}\frac{1}{z+k} + \mathfrak{P}(z+k)$$

($\mathfrak{P}$ bedeutet Potenzreihe),

daher

$$\Gamma'(z) = \frac{(-1)^{k+1}}{k!}\frac{1}{(z+k)^2} + \mathfrak{P}'(z+k),$$

somit

$$\lim_{z\to -k}\frac{\Gamma'(z)}{[\Gamma(z)]^2} = (-1)^{k+1}k!\,.$$

Wir bilden weiter aus (9) und (10)

$$(11)\qquad \frac{d}{d\varepsilon}\left[\mathfrak{Q}^m_{n-\frac{1}{2}+\varepsilon}(z)\sin\left(n-\frac{1}{2}+m+\varepsilon\right)\pi\right]_{\varepsilon=0}$$

$$= \sin\left(n-\frac{1}{2}+m\right)\pi\left[\frac{d}{d\varepsilon}\mathfrak{Q}^m_{n-\frac{1}{2}+\varepsilon}(z)\right]_{\varepsilon=0} + \pi\cos\left(n-\frac{1}{2}+m\right)\pi\,\mathfrak{Q}^m_{n-\frac{1}{2}}(z)$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}\sqrt{\pi}}{(2z)^{n+\frac{1}{2}}}\frac{(z^2-1)^{\frac{m}{2}}}{z^m}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(m+n+\frac{1}{2}+2\nu\right)}{\nu!\,(n+\nu)!\,(2z)^{2\nu}}\left[-\ln(2z) + \frac{\Gamma'\left(n+m+\frac{1}{2}+2\nu\right)}{\Gamma\left(n+m+\frac{1}{2}+2\nu\right)} - \frac{\Gamma'(n+1+\nu)}{\Gamma(n+1+\nu)}\right]$$

und

(12)
$$\frac{d}{d\varepsilon}\left[\mathfrak{Q}^m_{-n-\frac{1}{2}-\varepsilon}(z)\sin\left(n-\frac{1}{2}+\varepsilon-m\right)\pi\right]_{\varepsilon=0}$$

$$=\sin\left(n-\frac{1}{2}-m\right)\pi\left[\frac{d}{d\varepsilon}\mathfrak{Q}^m_{-n-\frac{1}{2}-\varepsilon}(z)\right]_{\varepsilon=0}+\pi\cos\left(n-\frac{1}{2}-m\right)\pi\,\mathfrak{Q}^m_{-n-\frac{1}{2}}(z)$$

$$=\frac{(-1)^{n+1}\sqrt{\pi}}{(2z)^{n+\frac{1}{2}}}\frac{(z^2-1)^{\frac{m}{2}}}{z^m}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(n+m+\frac{1}{2}+2\nu\right)}{\nu!\,(n+\nu)!\,(2z)^{2\nu}}\left[\ln(2z)\cdot\right.$$

$$\left.-\frac{\Gamma'\left(n+m+\frac{1}{2}+2\nu\right)}{\Gamma\left(n+m+\frac{1}{2}+2\nu\right)}+\frac{\Gamma'(\nu+1)}{\Gamma(\nu+1)}\right]$$

$$-\sqrt{\pi}\,(2z)^{n-\frac{1}{2}}\frac{(z^2-1)^{\frac{m}{2}}}{z^m}\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{\Gamma\left(m-n+\frac{1}{2}+2\nu\right)}{\nu!\,(2z)^{2\nu}}(-1)^\nu(n-\nu-1)!\,,$$

daher nach (8), (11), (12)

(13)
$$\mathfrak{P}^m_{n-\frac{1}{2}}(z)=\frac{2(-1)^m}{\pi^{\frac{3}{2}}}\frac{(z^2-1)^{\frac{m}{2}}\ln(2z)}{(2z)^{n+\frac{1}{2}}z^m}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(n+m+\frac{1}{2}+2\nu\right)}{\nu!\,(n+\nu)!\,(2z)^{2\nu}}$$

$$+\frac{(-1)^{m+1}}{\pi^{\frac{3}{2}}}\frac{(z^2-1)^{\frac{m}{2}}}{(2z)^{n+\frac{1}{2}}z^m}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(n+m+\frac{1}{2}+2\nu\right)}{\nu!\,(n+\nu)!\,(2z)^{2\nu}}\left[\frac{2\Gamma'\left(n+m+\frac{1}{2}+2\nu\right)}{\Gamma\left(n+m+\frac{1}{2}+2\nu\right)}\right.$$

$$\left.-\frac{\Gamma'(n+1+\nu)}{\Gamma(n+1+\nu)}-\frac{\Gamma'(\nu+1)}{\Gamma(\nu+1)}\right]$$

$$+\frac{(-1)^{m+n}}{\pi^{\frac{3}{2}}}(2z)^{n-\frac{1}{2}}\frac{(z^2-1)^{\frac{m}{2}}}{z^m}\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{(-1)^\nu(n-\nu-1)!}{\nu!\,(2z)^{2\nu}}\Gamma\left(m-n+\frac{1}{2}+2\nu\right)$$

$$=\frac{(-1)^m}{\pi}\left(1-\frac{1}{z^2}\right)^{\frac{m}{2}}\left\{\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdots(2n+2m+4\nu-1)}{2^{n+m+2\nu}\,\nu!\,(n+\nu)!\,(2z)^{n+2\nu+\frac{1}{2}}}\left[2\ln(2z)\right.\right.$$

$$\left.-\frac{2\Gamma'\left(n+m+\frac{1}{2}+2\nu\right)}{\Gamma\left(n+m+\frac{1}{2}+2\nu\right)}+\frac{\Gamma'(n+1+\nu)}{\Gamma(n+1+\nu)}+\frac{\Gamma'(\nu+1)}{\Gamma(\nu+1)}\right]$$

$$\left.+\frac{(-1)^n}{\sqrt{\pi}}\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{(-1)^\nu(n-\nu-1)!\,\Gamma\left(m-n+\frac{1}{2}+2\nu\right)}{\nu!\,(2z)^{2\nu-n+\frac{1}{2}}}\right\}.$$

Aus (13) lesen wir ab, daß $\mathfrak{P}^m_{n-\frac{1}{2}}(z)$ unendlich groß wird für $z \to +\infty$ und $n > 0$, aus (6)

$$\lim_{z \to +\infty} \mathfrak{Q}^m_{n-\frac{1}{2}}(z) = 0 .$$

Im Innenraum kommen also nur die Lösungen

$$\sqrt{\operatorname{Cof} \eta - \cos \vartheta}\; \mathfrak{Q}^m_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{Cof} \eta) \genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin} n \vartheta \genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin} m \varphi$$

in Betracht. Zur Berechnung von $\mathfrak{P}^m_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{Cof} \eta)$ und $\mathfrak{Q}^m_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{Cof} \eta)$ können die Formeln (6) und (13) dienen.

22. Kegelfunktionen. Wir betrachten einen Raum, der von zwei Kugeln mit demselben Mittelpunkt und den Halbmessern a und b und einem Halbkegel begrenzt ist, der seinen Scheitel im Mittelpunkt der Kugeln und den halben Öffnungswinkel α hat. Wir suchen eine Potentialfunktion, die auf den kugelförmigen Randteilen dieses Gebietes den Wert 0 hat. Wir setzen dafür $\left(A r^n + \frac{B}{r^{n+1}}\right) S_n$ nach (I·8) an, wobei A und B konstant sind und S_n eine Kugelflächenfunktion vom Grad n ist. Die Randbedingungen sind

$$A a^n + B a^{-n-1} = 0, \qquad A b^n + B b^{-n-1} = 0,$$

somit

$$a^{2n+1} = b^{2n+1}$$

oder

$$n = -\frac{1}{2} + \frac{k \pi i}{\ln \frac{b}{a}},$$

wobei k eine ganze Zahl bedeutet. Man wird dadurch auf Kugelfunktionen mit komplexen Zeigern geführt. Durch die Überlegungen von (I·47) kommt man dabei auf die Differentialgleichung für $\mathfrak{P}^m_n(z)$ mit $n = -\frac{1}{2} + p i$, wobei p reell ist. Ihre Lösungen bezeichnet man als Kegelfunktionen, sie wurden von MEHLER[1]) eingeführt und von HOBSON[2]) als besonderer Fall der Kugelfunktionen erkannt. Man führt für sie die Bezeichnung

$$K^m_p(z) = \mathfrak{P}^m_{-\frac{1}{2}+p i}(z)$$

ein. In unserem Fall erhalten wir Lösungen der Potentialgleichung von der Gestalt $r^{-\frac{1}{2} \pm p i} K^m_p(\cos \vartheta) \genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin} m \varphi$ oder, wenn wir $r = e^\eta$ einführen, $e^{-\frac{\eta}{2}} \genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}(p \eta)\, K^m_p(\cos \vartheta) \genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin} m \varphi$. Die Randbedingung auf der kegelförmigen

---

[1]) G. MEHLER, J. reine angew. Math. 68 (1868) 134; Math. Ann. 18 (1881) 161; C. NEUMANN, Math. Ann. 18 (1881); Ber. der Sächs. Akademie, Bd. 12.

[2]) E. W. HOBSON, Camb. Phil. Trans. 14 (1889) 211.

Berandung liefert die Gleichungen zur Bestimmung von A, B und der Konstanten in S_n.

Schreiben wir pi statt n in Ziffer (19·1), so erhalten wir in den Ringkoordinaten η, ϑ, φ die Lösungen

$$\sqrt{\operatorname{Cof}\eta - \cos\vartheta}\, K_p^m(\operatorname{Cof}\eta) \,{\operatorname{Cof} \atop \operatorname{Sin}}\, p\vartheta \,{\cos \atop \sin}\, m\varphi,$$

die sich für Randwertaufgaben von Bereichen eignen, welche von Kugelhauben, d. h. von Flächen $\vartheta = \text{const}$ begrenzt sind (linsenförmige Körper).

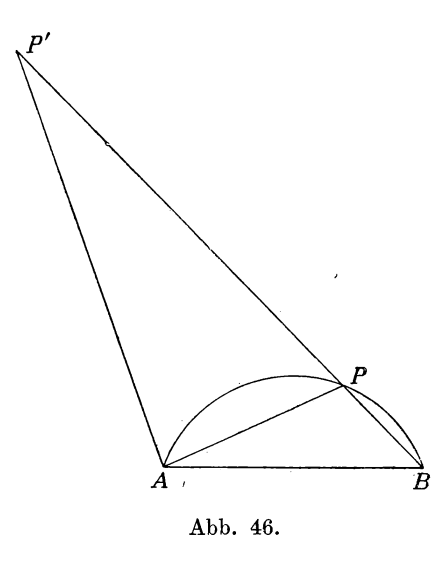


Abb. 46.

23. Dipolare Koordinaten. Die in Ziffer 19 beim Ring eingeführten krummlinigen Koordinaten η und ϑ lassen sich noch in folgender Weise deuten: Es war $\eta = \ln \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$, $\vartheta = \sphericalangle APB$. Wir schlagen um B (Abb. 46) mit dem Halbmesser $k = \overline{AB}$ einen Kreis und spiegeln die Punkte P an diesem Kreis. Dem Punkt P entspricht dann ein Punkt P', der mit P auf einer durch B gehenden Geraden liegt, wobei

(1) $$\overline{BP} \cdot \overline{BP'} = \overline{AB}^2 = k^2$$

ist. Da wegen (1) $\overline{BP} : \overline{AB} = \overline{AB} : \overline{BP'}$ gilt, sind die Dreiecke ABP und $P'BA$ ähnlich, somit ist

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{AP'}}{\overline{AB}} = \frac{r}{k},$$

wenn wir $\overline{AP'} = r$ setzen, also

(2) $$\frac{r}{k} = e^\eta.$$

Ferner folgt aus der Ähnlichkeit der beiden Dreiecke

(3) $$\sphericalangle BAP' = \sphericalangle BPA = \vartheta.$$

Den Kreisen K durch die Punkte A und B entsprechen bei der Spiegelung die Geraden durch den Punkt A, den Kreisen K', welche die Kreise K senkrecht schneiden, somit wegen der Winkeltreue die Kreise, welche die Gerade durch A senkrecht schneiden, d. h. alle Kreise mit A als Mittelpunkt. Dem Punkt P mit den krummlinigen Koordinaten η, ϑ entspricht

bei der Spiegelung der Punkt P'. Wenn wir A als Anfangspunkt, AB als Polarachse wählen, können wir P' wegen (3) durch die Polarkoordinaten r, ϑ festlegen. Lassen wir das Ganze um AB rotieren und führen wir noch den Drehwinkel φ ein, so erhalten wir folgende Verhältnisse im Raum: Um B ist eine Kugel mit dem Halbmesser $k = \overline{AB}$ beschrieben. Spiegelt man einen Punkt P des Raumes an dieser Kugel, so erhält man einen Punkt P', der mit P auf einer durch den Mittelpunkt der Kugel gehenden Geraden liegt. Ist P durch die Koordinaten η, ϑ, φ festgelegt, so hat P' die Kugelkoordinaten r, ϑ, φ. Den Drehkegeln mit dem Scheitel A und der Drehachse AB entsprechen spindelförmige Flächen, die von den Kugelhauben begrenzt sind, welche durch die Drehung der Kreisbogen APB entstehen. Den Kugeln mit dem Mittelpunkt A entsprechen Kugeln, welche die erwähnten spindelförmigen Flächen senkrecht schneiden, die also durch die Drehung der Kreise K' entstehen. η, ϑ, φ bezeichnet man als dipolare Koordinaten.

Wenn wir die rechtwinkligen Koordinaten von P' bezüglich B als Nullpunkt mit x', y', z', die von P mit x, y, z bezeichnen und $\overline{BP'} = r'$ einführen, so ist nach (1)

$$x : x' = y : y' = z : z' = \frac{k^2}{r'} : r' = k^2 : r'^2,$$

daher

$$x = \frac{k^2 x'}{r'^2}, \qquad y = \frac{k^2 y'}{r'^2}, \qquad z = \frac{k^2 z'}{r'^2}.$$

24. Spiegelung an der Kugel. Um diese Tatsache weiter verwenden zu können, müssen wir vorher noch folgenden wichtigen Satz beweisen: Wir denken uns ein rechtwinkliges Koordinatensystem x, y, z und die zugehörigen Kugelkoordinaten r, ϑ, φ. V möge der LAPLACEschen Differentialgleichung $\Delta V = 0$ genügen oder in Kugelkoordinaten ausgedrückt nach (I, 4·2)

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\,\frac{\partial V}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2} = 0.$$

Dann genügt auch die Funktion

$$V'(r, \vartheta, \varphi) = \frac{1}{r}\, V\left(\frac{k^2}{r}, \vartheta, \varphi\right)$$

dieser Gleichung. Es ist nämlich, wenn wir $\varrho = \frac{k^2}{r}$ setzen,

$$\frac{\partial V'}{\partial r} = -\frac{V}{r^2} - \frac{k^2}{r^3}\frac{\partial V}{\partial\varrho},$$

$$\frac{\partial^2 V'}{\partial r^2} = \frac{2V}{r^3} + \frac{4k^2}{r^4}\frac{\partial V}{\partial\varrho} + \frac{k^4}{r^5}\frac{\partial^2 V}{\partial\varrho^2},$$

$$r^5\left(\frac{\partial^2 V'}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial V'}{\partial r}\right) = k^4\left(\frac{\partial^2 V}{\partial\varrho^2} + \frac{2}{\varrho}\frac{\partial V}{\partial\varrho}\right),$$

somit

$$\frac{\partial^2 V'}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial V'}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial V'}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 V'}{\partial\varphi^2}$$

$$= \frac{\varrho^5}{k^6}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial\varrho^2} + \frac{2}{\varrho}\frac{\partial V}{\partial\varrho}\right) + \frac{\varrho^3}{k^6 \sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial V}{\partial\vartheta}\right) + \frac{\varrho^3}{k^6\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}$$

$$= \frac{\varrho^5}{k^6}\left[\frac{\partial^2 V}{\partial\varrho^2} + \frac{2}{\varrho}\frac{\partial V}{\partial\varrho} + \frac{1}{\varrho^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial V}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{\varrho^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}\right],$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

In rechtwinkligen Koordinaten ausgedrückt, können wir auch sagen: Wenn $V(x, y, z)$ die LAPLACEsche Differentialgleichung befriedigt, so ist auch

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\, V\left(\frac{k^2 x}{x^2+y^2+z^2}, \frac{k^2 y}{x^2+y^2+z^2}, \frac{k^2 z}{x^2+y^2+z^2}\right)$$

Lösung. Denn beim Vertauschen von r mit $\frac{k^2}{r}$ geht der Punkt mit den Koordinaten

$$\begin{cases} x = r\sin\vartheta\cos\varphi, \\ y = r\sin\vartheta\sin\varphi, \\ z = r\cos\vartheta \end{cases}$$

über in den Punkt mit den Koordinaten

$$\begin{cases} \frac{k^2}{r}\sin\vartheta\cos\varphi = \frac{k^2 x}{r^2}, \\ \frac{k^2}{r}\sin\vartheta\sin\varphi = \frac{k^2 y}{r^2}, \\ \frac{k^2}{r}\cos\vartheta \qquad\quad = \frac{k^2 z}{r^2}. \end{cases}$$

Die Punkte (x, y, z) und $\left(\frac{k^2 x}{r^2}, \frac{k^2 y}{r^2}, \frac{k^2 z}{r^2}\right)$ sind aber nach den Betrachtungen von Ziffer 23 gerade spiegelbildliche Punkte bezüglich einer Kugel, deren Mittelpunkt im Nullpunkt liegt und deren Halbmesser k ist. Hat man also eine Lösung der LAPLACEschen Differentialgleichung, so erhält man wieder eine Lösung, wenn man den Punkt durch den Spiegelpunkt bezüglich der genannten Kugel ersetzt und die Funktion durch seine Entfernung vom Nullpunkt dividiert.

Um das Ergebnis auf Ziffer 23 anzuwenden, beachten wir folgendes: Aus einer Lösung im Punkt P' erhalten wir wieder eine Lösung, wenn wir sie durch $\overline{BP}$ dividieren oder mit $\overline{BP'}$ multiplizieren, da es auf einen konstanten Faktor nicht ankommt, weil die Differentialgleichung homogen ist. Eine Lösung im Punkt P', d. h. im Punkt mit den Kugelkoordinaten

r, ϑ, φ, hat aber nach (I·8) die Gestalt $r^n S_n(\vartheta, \varphi)$ bzw. $r^{-(n+1)} S_n(\vartheta, \varphi)$. Da nun wegen $r = k e^\eta$ (23·2)

$$\overline{BP'^2} = r^2 + k^2 - 2rk\cos\vartheta = 2k^2 e^\eta (\operatorname{Cof}\eta - \cos\vartheta)$$

ist, erhält man in $e^{\pm(n+\frac{1}{2})\eta}\sqrt{\operatorname{Cof}\eta - \cos\vartheta}\, S_n(\vartheta, \varphi)$ eine Lösung der Potentialgleichung in dipolaren Koordinaten. Weil die ursprüngliche Lösung $r^n S_n(\vartheta, \varphi)$ bzw. $r^{-(n+1)} S_n(\vartheta, \varphi)$ für Randwertprobleme der Kugeln mit dem Mittelpunkt A geeignet ist, wird die neue Lösung in den dipolaren Koordinaten für die Flächen $\eta = \text{const}$, d. h., für Randwertprobleme der Kugeln verwendet werden, die durch Rotation der Kreise K' entstehen, also nicht denselben Mittelpunkt haben. Solche Aufgaben wurden zuerst von Lord KELVIN[1]) und C. NEUMANN[2]) gelöst.

Verwenden wir die in Ziffer 22 gegebene Lösung für Kegelflächen, so erhalten wir durch die Spiegelung Lösungen, die für die spindelförmigen Flächen in Betracht kommen, da die Drehkegeln, deren Scheitel im Punkte A liegt und deren Drehachse AB ist, in diese spindelförmigen Flächen übergehen, die durch Rotation der Kreise K entstehen. Man erhält dadurch Lösungen von der Gestalt

$$\sqrt{\operatorname{Cof}\eta - \cos\vartheta}\;\frac{\cos}{\sin}\, p\eta\, K_p^m(\cos\vartheta)\;\frac{\cos}{\sin}\, m\varphi\,.$$

§ 4. Elektromagnetische Schwingungen.

25. Feldgleichungen. Im folgenden bedeutet $\mathfrak{E}$ die elektrische Feldstärke, $\mathfrak{H}$ die magnetische Feldstärke, ε die Dielektrizitätskonstante, σ die Leitfähigkeit, μ die Permeabilität, c die Lichtgeschwindigkeit. Als Maßsystem wollen wir das GAUSSsche Maßsystem zugrunde legen, in dem die elektrischen Größen im elektrostatischen, die magnetischen im elektromagnetischen Maßsystem gemessen werden und das auch von H. HERTZ benutzt wurde.

Dann lauten die MAXWELLschen Feldgleichungen für ein ruhendes ladungsfreies Mittel mit den festen Materialkonstanten ε, σ, μ:

$$\text{(1)}\qquad \begin{aligned} \operatorname{rot}\mathfrak{H} &= \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial t} + \frac{4\pi\sigma}{c}\mathfrak{E}, \\ \operatorname{rot}\mathfrak{E} &= -\frac{\mu}{c}\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial t}, \\ \operatorname{div}\mathfrak{H} &= 0, \quad \operatorname{div}\mathfrak{E} = 0. \end{aligned}$$

---

[1]) W. THOMSON (LORD KELVIN), J. Math. pur. appl. 12 (1846) 256.

[2]) C. NEUMANN, Allgemeine Lösung des Problems über den stationären Temperaturzustand eines homogenen Körpers, welcher von irgend nichtkonzentrischen Kugelflächen begrenzt wird. Halle 1862.

Wir betrachten Lösungen, die bezüglich der Zeit rein periodisch sind, d. h. wir setzen

(2)
$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}^* e^{-i\omega t},$$
$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}^* e^{-i\omega t},$$

wobei $\mathfrak{E}^*$, $\mathfrak{H}^*$ nicht mehr von der Zeit t abhängen. Aus der Gestalt der Feldgleichungen ergibt sich, da es sich um homogene lineare Differentialgleichungen mit reellen Koeffizienten handelt, daß sowohl die reellen, als auch die imaginären Teile von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ zusammengehörige Lösungen liefern; ω ist dann die sogenannte Kreisfrequenz, d. h. die Zahl der Schwingungen in 2π Zeiteinheiten oder, wenn τ die Schwingungsdauer bedeutet, $\omega = \frac{2\pi}{\tau}$.

Wir versuchen die Feldgleichungen durch den Ansatz

(3)
$$\mathfrak{E}^* = k^2 \mathfrak{Z} + \operatorname{grad} U,$$
$$\mathfrak{H}^* = -\frac{i c k^2}{\mu \omega} \operatorname{rot} \mathfrak{Z}$$

zu lösen. Die zweite und dritte der Feldgleichungen sind erfüllt. Setzen wir (2) und (3) in die erste Feldgleichung ein, so ergibt sich

$$-\frac{i c k^2}{\mu \omega} \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathfrak{Z}) = -\frac{i \omega \varepsilon}{c}(k^2 \mathfrak{Z} + \operatorname{grad} U) + \frac{4\pi\sigma}{c}(k^2 \mathfrak{Z} + \operatorname{grad} U)$$

oder, wenn wir

(4)
$$k^2 = \frac{\mu \omega}{c^2}(\varepsilon \omega + 4\pi i \sigma)$$

setzen,

(5)
$$\operatorname{grad} U - \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathfrak{Z}) + k^2 \mathfrak{Z} = 0.$$

Daraus folgt

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} U + k^2 \operatorname{div} \mathfrak{Z} = 0$$

oder

$$\operatorname{div} \mathfrak{E}^* = 0,$$

d. h. auch die vierte der Feldgleichungen ist erfüllt, wenn U und $\mathfrak{Z}$ die Gleichung (5) befriedigen. Wir wollen übereinkommen, daß wir für k jenen Wert aus (4) wählen, bei dem der imaginäre Bestandteil das positive Zeichen hat, und k die Wellenzahl nennen.

26. Lösung der Feldgleichungen. Wir gehen zu Kugelkoordinaten über und nehmen an, daß der Vektor $\mathfrak{Z}$ nur eine radiale Komponente Π^* habe. Gemäß (I·4) und (I·5) erhält man daher aus (25·3) für die drei Komponenten

von $\mathfrak{E}^*$, $\mathfrak{H}^*$ und rot $\mathfrak{Z}$ bezüglich der Richtungen r, ϑ, φ (Komponenten in der Richtung des Radius, Meridians und Parallelkreises)

$$\text{(1)} \qquad \mathfrak{E}^* = \begin{cases} k^2 \Pi^* + \dfrac{\partial U}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r} \dfrac{\partial U}{\partial \vartheta} \\ \dfrac{1}{r \sin\vartheta} \dfrac{\partial U}{\partial \varphi}, \end{cases}$$

$$\mathfrak{H}^* = \begin{cases} 0 \\ -\dfrac{i c k^2}{\mu \omega r \sin\vartheta} \dfrac{\partial \Pi^*}{\partial \varphi} \\ \dfrac{i c k^2}{\mu \omega r} \dfrac{\partial \Pi^*}{\partial \vartheta} \end{cases}$$

$$\operatorname{rot} \mathfrak{Z} = \begin{cases} 0 \\ \dfrac{1}{r \sin\vartheta} \dfrac{\partial \Pi^*}{\partial \varphi} \\ -\dfrac{1}{r} \dfrac{\partial \Pi^*}{\partial \vartheta}, \end{cases}$$

somit

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathfrak{Z}) = \begin{cases} -\dfrac{1}{r^2 \sin\vartheta} \dfrac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\sin\vartheta \dfrac{\partial \Pi^*}{\partial \vartheta}\right) - \dfrac{1}{r^2 \sin^2\vartheta} \dfrac{\partial^2 \Pi^*}{\partial \varphi^2} \\ \dfrac{1}{r} \dfrac{\partial^2 \Pi^*}{\partial r\, \partial \vartheta} \\ \dfrac{1}{r \sin\vartheta} \dfrac{\partial^2 \Pi^*}{\partial r\, \partial \varphi}. \end{cases}$$

Gleichung (25·5) liefert daher

$$\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \vartheta} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Pi^*}{\partial r\, \partial \vartheta},$$

$$\frac{1}{r \sin\vartheta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} = \frac{1}{r \sin\vartheta} \frac{\partial^2 \Pi^*}{\partial r\, \partial \varphi},$$

infolgedessen ist $U = \dfrac{\partial \Pi^*}{\partial r}$ eine Lösung, die, in die r-Komponente der Gleichung (25·5) eingesetzt,

$$\text{(2)} \qquad \frac{\partial^2 \Pi^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\sin\vartheta \frac{\partial \Pi^*}{\partial \vartheta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\vartheta} \frac{\partial^2 \Pi^*}{\partial \varphi^2} + k^2 \Pi^* = 0$$

ergibt.

Setzen wir $\Pi^* = r\,\Pi$, so folgt nach (1), (2) und (I, 4·2)

(3)
$$\mathfrak{E}^* = \begin{cases} k^2 r\,\Pi + \dfrac{\partial^2 (r\,\Pi)}{\partial r^2} \\ \dfrac{1}{r}\,\dfrac{\partial^2 (r\,\Pi)}{\partial r\,\partial\vartheta} \\ \dfrac{1}{r\sin\vartheta}\,\dfrac{\partial^2 (r\,\Pi)}{\partial r\,\partial\varphi} \end{cases} \qquad \mathfrak{H}^* = \begin{cases} 0 \\ -\dfrac{i\,c\,k^2}{\mu\,\omega\sin\vartheta}\,\dfrac{\partial \Pi}{\partial\varphi} \\ \dfrac{i\,c\,k^2}{\mu\,\omega}\,\dfrac{\partial\Pi}{\partial\vartheta}, \end{cases}$$

wobei Π der sogenannten Wellengleichung

(4) $$\Delta\Pi + k^2\Pi = 0$$

genügen muß.

Bei Unabhängigkeit von ϑ und φ, d. h. bei Kugelwellen ergibt sich nach (I, 4·2)

$$\Delta\Pi = \frac{1}{r^2}\,\frac{d}{dr}\left(r^2\,\frac{d\Pi}{dr}\right) = \frac{d^2\Pi}{dr^2} + \frac{2}{r}\,\frac{d\Pi}{dr} = \frac{1}{r}\,\frac{d^2(r\Pi)}{dr^2},$$

also

$$\frac{d^2(r\Pi)}{dr^2} + k^2\,r\,\Pi = 0$$

oder

$$r\,\Pi = A\,e^{ikr} + B\,e^{-ikr}.$$

Wegen des positiven imaginären Teils von k haben wir $B = 0$ zu setzen, wenn wir verhindern wollen, daß Π mit wachsendem r exponentiell zunimmt. Lassen wir den Amplitudenfaktor A weg, so ergibt sich

(5) $$\Pi = \frac{e^{ikr}}{r}.$$

27. Schwingungen einer Antenne. Das Ergebnis der vorigen Ziffer läßt sich zur Berechnung von Antennenschwingungen verwenden. Wenn es sich um eine Antenne handelt, die senkrecht zur Erdoberfläche steht, so ist ihr Feld symmetrisch um den durch sie gehenden Erddurchmesser derart, daß die magnetischen Kraftlinien in Kreisen um diesen Durchmesser verlaufen, deren Ebenen auf dem Durchmesser senkrecht stehen, während die elektrischen Kraftlinien in Ebenen verlaufen, die durch diesen Durchmesser gehen. Legen wir den Nullpunkt des Koordinatensystems in den Erdmittelpunkt O (Abb. 47) und die Achse OQ ($\vartheta = 0$) in die Antenne, so erhalten wir aus (26·3) unter Berücksichtigung der eben erläuterten

Symmetrieverhältnisse $\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = 0$ und für die (nach den Richtungen r, ϑ, φ gebildeten) Komponenten von $\mathfrak{E}^*$ und $\mathfrak{H}^*$ im Punkt $P\ (r, \vartheta, \varphi)$ das Ergebnis

$$(1)\qquad \mathfrak{E}^* = \begin{cases} k^2 r \Pi + \frac{\partial^2 (r\Pi)}{\partial r^2} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r\Pi)}{\partial r\, \partial \vartheta}, \\ 0 \end{cases} \qquad \mathfrak{H}^* = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \frac{i c k^2}{\mu \omega} \frac{\partial \Pi}{\partial \vartheta}. \end{cases}$$

Der Erdhalbmesser sei a, $\overline{OQ} = b$, (Q ist Ende der Antenne), $\overline{OP} = r$ (P ist Aufpunkt), $\overline{PQ} = R$. In Erde und Luft kann man $\mu = 1$ setzen, erhält infolgedessen $k^2 = \frac{\varepsilon \omega^2 + 4 \pi i \sigma \omega}{c^2}$, und zwar ergeben sich, weil ε bzw. σ

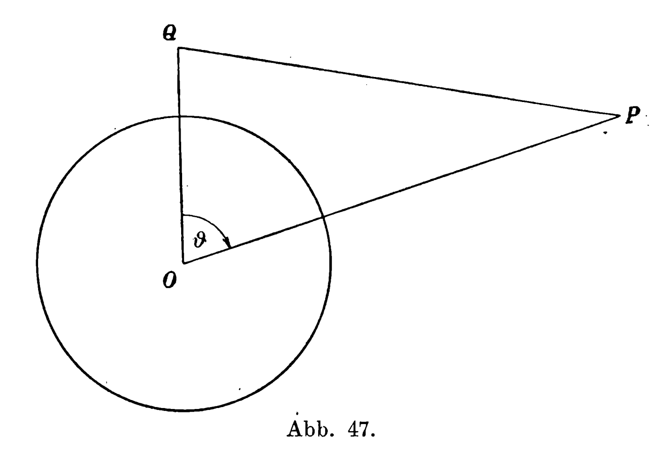


Abb. 47.

in Luft und Erde nicht dieselben Werte haben, zwei verschiedene Werte von k, k_1 in der Luft, k_2 in der Erde. Man hat daher

$$\Delta \Pi + k_1^2 \Pi = 0 \quad \text{für} \quad r > a$$
$$\Delta \Pi + k_2^2 \Pi = 0 \quad \text{für} \quad r < a.$$

Wegen der Stetigkeit der tangentiellen Komponenten von $\mathfrak{H}$ muß $k^2 \frac{\partial \Pi}{\partial \vartheta}$ für $r \to a$ denselben Wert annehmen, ob $r > a$ oder $r < a$; wegen der Stetigkeit der tangentiellen Komponenten von $\mathfrak{E}$ gilt dasselbe für $\frac{\partial^2 (r\Pi)}{\partial r\, \partial \vartheta}$.

28. Elektrischer Oszillator. Als primär von der Antenne ausgehendes Feld werde das Feld eines Dipols mit lotrechter Achse auf Grund des Ansatzes $\Pi = \Pi_{pr} = \frac{e^{i k_1 R}}{i k_1 R}$ angenommen. Dieser Ansatz genügt der Gleichung $\Delta \Pi + k_1^2 \Pi = 0$. Denn wegen $R = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - b)^2}$ genügt Π

nach Ziffer 26 der Gleichung $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial (z-b)^2} + k_1^2 \Pi = 0$ und außerdem ist $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial (z-b)^2} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2}$. Für kleine R erhält man das Feld eines Dipols. Man hat nämlich

$$R^2 = b^2 + r^2 - 2\,b\,r\cos\vartheta\,,$$

$$\frac{\partial R}{\partial r} = \frac{r - b\cos\vartheta}{R}\,,$$

$$\frac{\partial R}{\partial \vartheta} = \frac{b\,r\sin\vartheta}{R}\,,$$

somit für kleine R, wenn ϑ_1 den Winkel zwischen R und der positiven Z-Achse $(\overrightarrow{OQ})$ bedeutet,

$$\frac{\partial R}{\partial r} = \cos\vartheta_1, \quad \frac{\partial R}{\partial \vartheta} = b\sin\vartheta_1.$$

Für Luft können wir $\varepsilon = \mu = 1$, $\sigma = 0$, somit nach (25·4) $k_1 = \frac{\omega}{c}$ setzen. Daher ergibt sich aus (25·2) und (27·1) in der Nähe der Antenne in erster Näherung für kleine R

$$\mathfrak{H} = -\,\dot{\mathfrak{R}}\,\frac{e^{i\omega\left(\frac{R}{c}-t\right)}}{R^2}\,\frac{\partial R}{\partial \vartheta} = -\frac{b}{R^2}\cos\omega\left(t - \frac{R}{c}\right)\sin\vartheta_1.$$

Diese magnetische Feldstärke wird nach dem BIOT-SAVARTschen Gesetz durch einen in der Antenne in positiver Richtung fließenden elektrischen Strom von der Stromstärke $I = -\frac{b\,c}{b-a}\cos\omega t$ erzeugt, wenn wir im Kosinus das Glied $-\frac{\omega R}{c}$ in Anbetracht der gemachten Vernachlässigungen weglassen. Ein solches Wechselstromelement können wir durch einen in der Antenne liegenden Dipol von der Länge $b - a$ und vom Moment $M = -\frac{b\,c}{\omega}\sin\omega t$ verwirklichen. Denn dann ist

$$I = \frac{1}{b-a}\,\frac{dM}{dt} = -\frac{b\,c}{b-a}\cos\omega t.$$

Nun berechnen wir $\mathfrak{E}$ für kleine R. Aus (25·2) und (25·3) erhalten wir

$$\mathfrak{E} = -\operatorname{grad} V \text{ mit } V = -\,\dot{\mathfrak{R}}\,U e^{-i\omega t}\,,$$

wenn wir von dem Glied $k^2\,\mathfrak{Z}$ vorläufig absehen. Nach Ziffer 26 ist für kleine R

$$U = \frac{\partial \Pi^*}{\partial r} = \Pi + r\,\frac{\partial \Pi}{\partial r}$$

$$= -\frac{c\,r}{i\,\omega}\,\frac{e^{\frac{i\omega}{c}R}}{R^2}\,\frac{\partial R}{\partial r} = -\frac{b\,c}{i\,\omega}\,\frac{e^{\frac{i\omega}{c}R}}{R^2}\cos\vartheta_1,$$

somit

$$V = -\frac{b\,c}{\omega\,R^2}\sin\omega\left(t - \frac{R}{c}\right)\cos\vartheta_1 .$$

Vernachlässigen wir wieder wie vorher das Glied $-\frac{\omega R}{c}$, so ist V das Potential eines elektrischen Dipols von dem Moment $-\frac{b\,c}{\omega}\sin\omega\,t$, der in der Antenne liegt. Das Glied $k^2\,\mathfrak{Z}$ können wir weglassen, weil $|\Pi^*|$ in der Nähe der Antenne klein gegen $|\operatorname{grad} V|$ ist. Unsere Lösung liefert somit für kleine r das elektrische und magnetische Feld eines Dipols mit zeitlich periodischem Moment. Einen solchen Dipol nennt man einen elektrischen Oszillator.

29. Primäre und sekundäre Erregung. Wir führen mit E. HEINE[1]) und P. DEBYE[2]) die Abkürzungen

$$\text{(1)}\qquad \begin{aligned} \psi_\nu(z) &= \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\,J_{\nu+\frac{1}{2}}(z),\\ \zeta_\nu^{(1)}(z) &= \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\,H^{(1)}_{\nu+\frac{1}{2}}(z), \quad \zeta_\nu^{(2)} = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\,H^{(2)}_{\nu+\frac{1}{2}}(z) \end{aligned}$$

ein. Aus der Theorie der BESSELschen Funktionen erhält man nach L., S. 185[3]) die Entwicklungen

$$\text{(2)}\qquad \frac{e^{i k_1 R}}{i k_1 R} = \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\,\zeta_n^{(1)}(k_1 r)\,\psi_n(k_1 b)\,P_n(\cos\vartheta) \quad \text{für} \quad r > b$$

und durch Vertauschung von b und r

$$\text{(3)}\qquad \frac{e^{i k_1 R}}{i k_1 R} = \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\,\zeta_n^{(1)}(k_1 b)\,\psi_n(k_1 r)\,P_n(\cos\vartheta) \quad \text{für} \quad r < b .$$

Wir haben drei Gebiete zu unterscheiden: 1. den Außenraum ($r > b$, $k = k_1$), 2. die Zwischenschale ($b > r > a$, $k = k_1$), 3. das Erdinnere ($a > r$, $k = k_2$). Mit Rücksicht darauf, daß das Erdinnere primär nicht angeregt wird, setzen wir als primäre Erregung, die durch die Energiequelle in der Antenne erzeugt wird, im ersten Gebiet

$$\Pi_{1pr} = \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\,\psi_n(k_1 b)\,\zeta_n^{(1)}(k_1 r)\,P_n(\cos\vartheta),$$

im zweiten Gebiet

$$\Pi_{2pr} = \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\,\zeta_n^{(1)}(k_1 b)\,\psi_n(k_1 r)\,P_n(\cos\vartheta),$$

[1]) Siehe Fußnote in Ziffer II·32.

[2]) P. DEBYE, Ann. d. Phys. 30 (1909) 62.

[3]) Siehe Fußnote in (I·20).

im dritten Gebiet

$$\Pi_{3pr} = 0.$$

Den Teil des Feldes, der aus den Bedingungen der Ausbreitung hervorgeht und der Verschiedenheit der Materialkonstanten zwischen Luft und Erde Rechnung trägt, bezeichnet man als sekundäre Erregung. Wir setzen im ersten und zweiten Gebiet, da es sich um Lösungen der Wellengleichung handelt, die in der Luft den Charakter ausstrahlender Wellen haben,

$$\Pi_{1\,sek} = \Pi_{2\,sek} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, \zeta_n^{(1)}(k_1 r)\, P_n(\cos\vartheta)$$

und im dritten Gebiet, da die Lösungen im Innern der Erde überall endlich sind,

$$\Pi_{3\,sek} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n\, \psi_n(k_2 r)\, P_n(\cos\vartheta),$$

indem wir in beiden Fällen das Verhalten von $\zeta_n^{(1)}(z)$ und $\psi_n(z)$ im Nullpunkt und im Unendlichen berücksichtigen. Denn k_1 hat einen positiven Imaginärteil, also verschwindet $\zeta_n^{(1)}(k_1 r)$ im Unendlichen (L., S. 86) und $\psi_n(k_2 r)$ bleibt endlich im Nullpunkt (L., S. 63).

Für die Gesamterregung haben wir also

$$(4)\quad \begin{cases} \Pi_1 = \sum\limits_{n=0}^{\infty} [(2n+1)\, \psi_n(k_1 b) + a_n]\, \zeta_n^{(1)}(k_1 r)\, P_n(\cos\vartheta), \\ \Pi_2 = \sum\limits_{n=0}^{\infty} [(2n+1)\, \zeta_n^{(1)}(k_1 b)\, \psi_n(k_1 r) + a_n\, \zeta_n^{(1)}(k_1 r)]\, P_n(\cos\vartheta) \\ \Pi_3 = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n\, \psi_n(k_2 r)\, P_n(\cos\vartheta). \end{cases}$$

30. Grenzbedingungen. Die Grenzbedingung für $\frac{\partial^2 (r\Pi)}{\partial r\, \partial\vartheta}$ von Ziffer 27 erfüllen wir für $r = a$ (Grenze zwischen dem zweiten und dritten Gebiet) durch

$$(1)\quad \begin{aligned} &(2n+1)\, \zeta_n^{(1)}(k_1 b)\, \frac{\partial}{\partial r}[r\, \psi_n(k_1 r)]_{r=a} \\ &+ a_n \frac{\partial}{\partial r}[r \zeta_n^{(1)}(k_1 r)]_{r=a} = b_n \frac{\partial}{\partial r}[r\, \psi_n(k_2 r)]_{r=a}, \end{aligned}$$

ebenso die von $k^2 \frac{\partial \Pi}{\partial \vartheta}$ für $r = a$ durch

$$(2)\quad k_1^2 [(2n+1)\, \zeta_n^{(1)}(k_1 b)\, \psi_n(k_1 a) + a_n\, \zeta_n^{(1)}(k_1 a)] = k_2^2\, b_n\, \psi_n(k_2 a).$$

Wir befriedigen (2), indem wir mit festem R_n

(3) $$a_n = (2n+1)\, R_n \frac{\psi_n(k_1 a)}{\zeta_n^{(1)}(k_1 a)} \zeta_n^{(1)}(k_1 b)$$

und

$$b_n = (2n+1)\, \frac{k_1^2}{k_2^2}(1+R_n) \frac{\psi_n(k_1 a)}{\psi_n(k_2 a)} \zeta_n^{(1)}(k_1 b)$$

setzen.

Die Bedingung (1) liefert mit (3)

$$\zeta_n^{(1)}(k_1 b)\,[\psi_n(k_1 a) + k_1 a\, \psi_n'(k_1 a)]$$

$$+ R_n \frac{\psi_n(k_1 a)}{\zeta_n^{(1)}(k_1 a)} \zeta_n^{(1)}(k_1 b)\,[\zeta_n^{(1)}(k_1 a) + k_1 a\, \zeta_n^{(1)\prime}(k_1 a)]$$

$$= \frac{k_1^2}{k_2^2}(1+R_n) \frac{\psi_n(k_1 a)}{\psi_n(k_2 a)} \zeta_n^{(1)}(k_1 b)\,[\psi_n(k_2 a) + k_2 a\, \psi_n'(k_2 a)]$$

oder

$$\frac{1}{k_1^2 a^2} + \frac{\psi_n'(k_1 a)}{k_1 a\, \psi_n(k_1 a)} + R_n \left[\frac{1}{k_1^2 a^2} + \frac{\zeta_n^{(1)\prime}(k_1 a)}{k_1 a\, \zeta_n^{(1)}(k_1 a)}\right]$$

$$= (1+R_n)\left[\frac{1}{k_2^2 a^2} + \frac{\psi_n'(k_2 a)}{k_2 a\, \psi_n(k_2 a)}\right].$$

Führt man also

(4) $$Z_\nu(x) = \frac{1}{x}\frac{d}{dx} \ln [x \zeta_\nu^{(1)}(x)] = \frac{1}{x^2} + \frac{\zeta_\nu^{(1)\prime}(x)}{x\, \zeta_\nu^{(1)}(x)}$$

und

$$\Psi_\nu(x) = \frac{1}{x}\frac{d}{dx} \ln [x \psi_\nu(x)] = \frac{1}{x^2} + \frac{\psi_\nu'(x)}{x\, \psi_\nu(x)}$$

ein, so erhält man

(5) $$R_n = \frac{-\Psi_n(k_1 a) + \Psi_n(k_2 a)}{Z_n(k_1 a) - \Psi_n(k_2 a)}.$$

31. Ausbreitung der Wellen auf der Erdoberfläche. Für die Ausbreitung der Wellen auf der Erdoberfläche ($r = a$) ergibt sich somit aus (29·4), (30·3) und (30·5)

$$\Pi = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \zeta_n^{(1)}(k_1 b)\, \psi_n(k_1 a)\,(1+R_n)\, P_n(\cos\vartheta)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \zeta_n^{(1)}(k_1 b)\, \psi_n(k_1 a) \frac{Z_n(k_1 a) - \Psi_n(k_1 a)}{Z_n(k_1 a) - \Psi_n(k_2 a)} P_n(\cos\vartheta).$$

Nach (29·1) und L., S. 72 und 74 erhält man

$$\psi_n(x)\zeta_n^{(1)\prime}(x) - \zeta_n^{(1)}(x)\,\psi_n'(x)$$

$$= \frac{\pi}{2x}\left[J_{n+\frac{1}{2}}(x)\,H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)\prime}(x) - J'_{n+\frac{1}{2}}(x)\,H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(x)\right]$$

$$= \frac{\pi i}{2x}\left[J_{n+\frac{1}{2}}(x)\,N'_{n+\frac{1}{2}}(x) - J'_{n+\frac{1}{2}}(x)\,N_{n+\frac{1}{2}}(x)\right]$$

$$= \frac{i}{x^2}\,.$$

Damit können wir jetzt $Z_n(k_1a) - \Psi_n(k_1a)$ ausrechnen. Es ergibt sich nach (30·4)

$$(1)\qquad Z_n(k_1a) - \Psi_n(k_1a) = \frac{\psi_n(k_1a)\,\zeta_n^{(1)\prime}(k_1a) - \zeta_n^{(1)}(k_1a)\,\psi_n'(k_1a)}{k_1a\,\psi_n(k_1a)\,\zeta_n^{(1)}(k_1a)}$$

$$= \frac{i}{(k_1a)^3\,\psi_n(k_1a)\,\zeta_n^{(1)}(k_1a)}\,,$$

daher

$$(2)\qquad \Pi = \frac{i}{(k_1a)^3}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\,\frac{\zeta_n^{(1)}(k_1b)}{\zeta_n^{(1)}(k_1a)}\,\frac{P_n(\cos\vartheta)}{N_n}\,,$$

wenn wir kurz

$$(3)\qquad N_\nu = Z_\nu(k_1a) - \Psi_\nu(k_2a)$$

setzen.

32. Zurückführung auf ein komplexes Integral. Beim Rundfunk ist das Verhältnis $\frac{2\pi a}{\lambda}$ von der Größenordnung 10^3 bis 10^7 (a ist hier der Erdhalbmesser, λ die Wellenlänge der elektrischen Wellen), beim Regenbogen von der Größenordnung 10^4 (a ist hier der Halbmesser der Wassertröpfchen, λ die Wellenlänge des sichtbaren Lichtes). In beiden Fällen ist also nach Ziffer 28 in Luft $k_1a = \frac{\omega a}{c} = \frac{2\pi a}{\lambda}$ sehr groß, die Reihe (31·2) konvergiert infolgedessen sehr schlecht, wie man erkennen kann, wenn man die asymptotischen Formeln benützt. Wir versuchen daher mit G. N. WATSON[1]) die Reihe durch ein komplexes Integral darzustellen. Wir setzen zu diesem Zweck

$$I_n = \int \frac{t\,dt}{\cos(\pi t)}\,\frac{\zeta_{t-\frac{1}{2}}^{(1)}(k_1b)}{\zeta_{t-\frac{1}{2}}^{(1)}(k_1a)}\,\frac{P_{t-\frac{1}{2}}[(\cos(\pi-\vartheta)]}{N_{t-\frac{1}{2}}}$$

und erstrecken dieses Integral im negativen Sinn über einen kleinen Kreis, dessen Mittelpunkt in $t = n + \frac{1}{2}$ liegt und der sonst keine der Nullstellen

[1]) G. N. WATSON, Proc. Roy. Soc. London A, 95 (1918) 83, (1919) 546.

von $\cos(\pi t)$ umschließt. Eine nähere Untersuchung des Integranden von I_n liefert folgendes Ergebnis: Der Integrand ist in der rechten Halbebene einschließlich der imaginären Achse regulär außer an den Nullstellen von $\cos \pi t$ und denen von $N_{t-\frac{1}{2}}$; die Nullstellen von $\cos \pi t$ sind, wie schon erwähnt, die Punkte $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots$ auf der reellen Achse, die Nullstellen $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \ldots$ von $N_{t-\frac{1}{2}}$ liegen im ersten Quadranten (Abb. 48). Ihre Beträge sind von der Größenordnung $|k_1| a$.

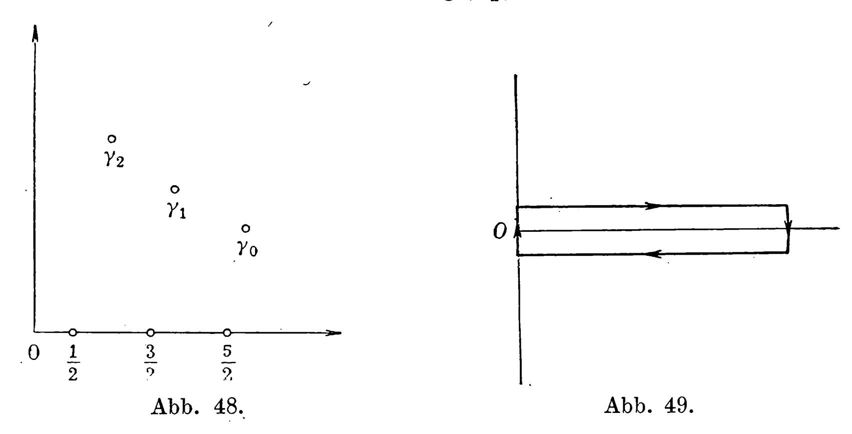


Abb. 48. Abb. 49.

Man erhält daher folgende Entwicklung:

$$\cos(\pi t) = \cos\left\{\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi + \left[t - \left(n + \frac{1}{2}\right)\right]\pi\right\}$$

$$= (-1)^{n+1}\left[t - \left(n + \frac{1}{2}\right)\right]\pi + \text{Glieder mit höheren}$$

Potenzen von $\left[t - \left(n + \frac{1}{2}\right)\right]\pi$,

$$I_n = -2\pi i \frac{(-1)^{n+1}}{\pi}\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\zeta_n^{(1)}(k_1 b)}{\zeta_n^{(1)}(k_1 a)}\frac{P_n(-\cos\vartheta)}{N_n}$$

$$= i(2n+1)\frac{\zeta_n^{(1)}(k_1 b)}{\zeta_n^{(1)}(k_1 a)}\frac{P_n(\cos\vartheta)}{N_n} \qquad \text{(wegen I, 13·4).}$$

Setzen wir diesen Ausdruck in (31·2) ein, so ergibt sich

$$(1) \qquad \Pi = \frac{1}{(k_1 a)^3}\sum_{n=0}^{\infty} I_n .$$

Betrachten wir nun zuerst nur die ersten m Glieder in der Summe von (1). Die Summe dieser Integrale können wir dadurch bilden, daß wir den Integranden über den Weg von Abb. 49 integrieren, der nur die Punkte $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \ldots, m - \frac{1}{2}$ umschließt, alle übrigen Nullstellen außerhalb liegen

läßt. Nun fügen wir zu diesem Weg die doppelt, aber entgegengesetzt durchlaufenen Stücke der imaginären Achse und des Kreises (Mittelpunkt 0, Halbmesser R) von Abb. 50 hinzu. Dann ändert sich die Summe nicht. Der Integrationsweg besteht jetzt aus den beiden Wegen C_1 und C_2 von Abb. 51, einem von unten nach oben durchlaufenen Stück der imaginären Achse und dem im negativen Sinn durchlaufenen Halbkreis der rechten Halbebene mit dem Mittelpunkt 0 und dem Halbmesser R. Das

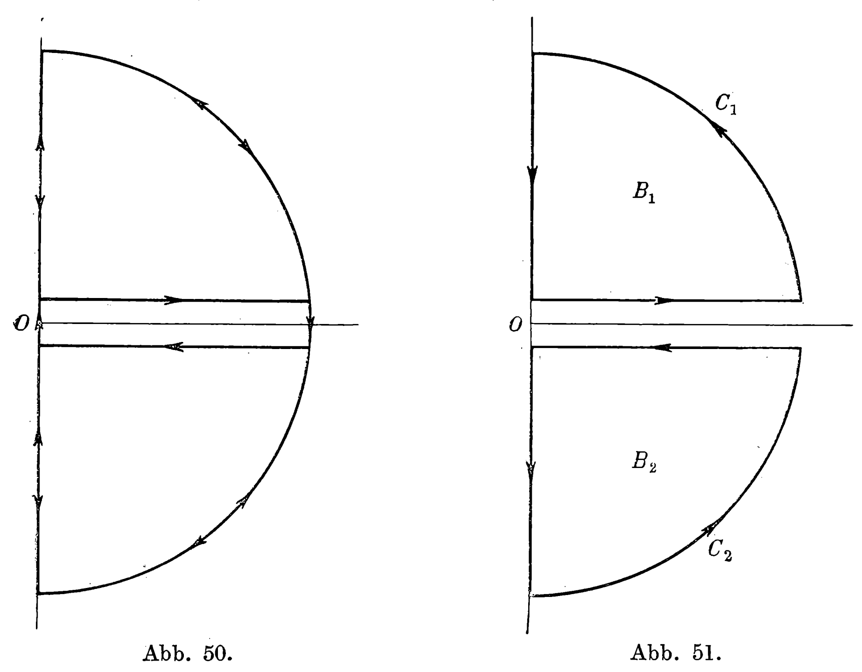


Abb. 50. Abb. 51.

Integral über den unteren Weg C_2 von Abb. 51 ist Null, weil der Integrand in dem umschlossenen Bereich B_2 regulär ist. Das Integral über den oberen Weg C_1 ist gleich der Summe der Integrale, erstreckt im positiven Sinne über entsprechend kleine Kreise K_n, welche die in B_1 enthaltenen Nullstellen γ_n jeweils einzeln umschließen.

Kann man nun zeigen, daß das Integral über den Halbkreis für $R \to +\infty$ verschwindet, so wird die unendliche Summe in (1) gleich der unendlichen Summe der Integrale über die Kreise K_n, vermehrt um das Integral längs der imaginären Achse. Zur Untersuchung des Integranden über den Halbkreis für $R \to +\infty$ benötigt man die asymptotischen Formeln der Kugelfunktionen von Ziffer (II·47) und diejenigen von P. DEBYE[1])

[1]) P. DEBYE, S.-B. math. nat. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München 1910, Nr. 5.

für die HANKELschen Funktionen mit komplexen Zeigern. Eine ausführliche Darstellung der Untersuchung der singulären Stellen des Integranden in allen Einzelheiten samt einer genauen Abschätzung seines Verhaltens auf dem Halbkreis wäre sehr wünschenswert.

33. Berechnung des komplexen Integrals. Das Integral über die imaginäre Achse läßt sich in folgender Weise umformen: Berücksichtigen wir, daß nach (II, 17·5)

$$P_\nu(z) = P_{-\nu-1}(z)$$

und nach L., S. 73

$$H^{(1)}_{-\nu}(z) = e^{\nu\pi i}\, H^{(1)}_\nu(z)$$

ist, so wird

(1) $$P_{-t-\frac{1}{2}}(z) = P_{t-\frac{1}{2}}(z) \quad \text{und} \quad \zeta^{(1)}_{-t-\frac{1}{2}}(z) = e^{i\pi t}\zeta^{(1)}_{t-\frac{1}{2}}(z).$$

Führen wir also in dem Integral über die imaginäre Achse auf der negativen Achse $-t$ statt t als Veränderliche ein, so ergibt sich schließlich

(2) $$\Pi = \frac{1}{(k_1 a)^3}\sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_{K_n}\frac{t\,dt}{\cos(\pi t)}\,\frac{\zeta^{(1)}_{t-\frac{1}{2}}(k_1 b)}{\zeta^{(1)}_{t-\frac{1}{2}}(k_1 a)}\,\frac{P_{t-\frac{1}{2}}[\cos(\pi-\vartheta)]}{N_{t-\frac{1}{2}}}$$

$$+\frac{1}{(k_1 a)^3}\int\frac{t\,dt}{\cos(\pi t)}\,\frac{\zeta^{(1)}_{t-\frac{1}{2}}(k_1 b)}{\zeta^{(1)}_{t-\frac{1}{2}}(k_1 a)}\left(\frac{1}{N_{t-\frac{1}{2}}}-\frac{1}{N_{-t-\frac{1}{2}}}\right)P_{t-\frac{1}{2}}[\cos(\pi-\vartheta)],$$

wobei das zweite Integral über die positive imaginäre Achse vom Nullpunkt bis ins Unendliche zu erstrecken ist.

Nach (30·4) und (1) ist

(3) $$Z_{t-\frac{1}{2}}(x) = Z_{-t-\frac{1}{2}}(x),$$

ferner nach (29·1) und L., S. 70

(4) $$\psi_t(x) = \frac{1}{2}\left[\zeta^{(1)}_t(x) + \zeta^{(2)}_t(x)\right]$$

$$\psi_t'(x) = \frac{1}{2}\left[\zeta^{(1)\prime}_t(x) + \zeta^{(2)\prime}_t(x)\right].$$

Wegen der großen Leitfähigkeit σ der Erde hat k_2^2 nach (25·4) einen großen positiven Imaginärteil, daher auch k_2, also ist $|e^{ik_2 a}|$ sehr klein. Berücksichtigt man diese Tatsache in den asymptotischen Formeln für $\zeta^{(1)}_t(k_2 a)$ und $\zeta^{(2)}_t(k_2 a)$ (L., S. 82), so kann man $\zeta^{(1)}_t(k_2 a)$ gegenüber $\zeta^{(2)}_t(k_2 a)$ vernachlässigen und erhält aus (4)

$$\frac{\psi_t'(k_2 a)}{\psi_t(k_2 a)} = \frac{\zeta^{(2)\prime}_t(k_2 a)}{\zeta^{(2)}_t(k_2 a)},$$

daher ist nach (30·4)

$$\Psi_{t-\frac{1}{2}}(k_2 a) = \frac{1}{k_2^2 a^2} + \frac{\zeta_{t-\frac{1}{2}}^{(2)\prime}(k_2 a)}{k_2 a\, \zeta_{t-\frac{1}{2}}^{(2)}(k_2 a)}\,.$$

Nun ist aber (L., S. 73)

$$H_{-\nu}^{(2)}(z) = e^{-\nu\pi i} H_\nu^{(2)}(z),$$

daher

$$\zeta_{-t-\frac{1}{2}}^{(2)}(z) = e^{-t\pi i}\zeta_{t-\frac{1}{2}}^{(2)}(z),$$

also

$$\Psi_{-t-\frac{1}{2}}(k_2 a) = \Psi_{t-\frac{1}{2}}(k_2 a),$$

somit nach (3) und (31·3)

$$N_{t-\frac{1}{2}} = N_{-t-\frac{1}{2}}\,.$$

Das zweite Integral in (2) fällt somit weg und es bleibt

$$\Pi = \frac{1}{(k_1 a)^3}\sum_{n=0}^{\infty}\int_{K_n}\frac{t\,dt}{N_{t-\frac{1}{2}}}\,\frac{\zeta_{t-\frac{1}{2}}^{(1)}(k_1 b)}{\zeta_{t-\frac{1}{2}}^{(1)}(k_1 a)}\,\frac{P_{t-\frac{1}{2}}[\cos(\pi-\vartheta)]}{\cos(\pi t)}\,.$$

Da in einer genügend kleinen Umgebung von γ_n die Entwicklung

$$N_{t-\frac{1}{2}} = \left(\frac{d\,N_{t-\frac{1}{2}}}{dt}\right)_{t=\gamma_n}(t-\gamma_n) + \cdots$$

gilt, hat man, wenn man kurz

$$N'_{\gamma_n-\frac{1}{2}} = \left(\frac{d\,N_{t-\frac{1}{2}}}{dt}\right)_{t=\gamma_n}$$

schreibt,

$$\Pi = \frac{2\pi i}{(k_1 a)^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\gamma_n}{N'_{\gamma_n-\frac{1}{2}}}\,\frac{\zeta_{\gamma_n-\frac{1}{2}}^{(1)}(k_1 b)}{\zeta_{\gamma_n-\frac{1}{2}}^{(1)}(k_1 a)}\,\frac{P_{\gamma_n-\frac{1}{2}}[\cos(\pi-\vartheta)]}{\cos(\pi\gamma_n)}\,. \tag{5}$$

Weil die $|\gamma_n|$ von der Größenordnung $|k_1|\,a$ und auch $\Re\left(\frac{\gamma_n}{i}\right)$ sehr groß ist, ergibt sich

$$\frac{1}{\cos(\pi\gamma_n)} = \frac{2}{e^{\pi i\gamma_n} + e^{-\pi i\gamma_n}} = \frac{2\,e^{\pi i\gamma_n}}{1+e^{2\pi i\gamma_n}}$$
$$= 2e^{\pi i\gamma_n}\sum_{m=0}^{\infty} e^{m i\pi(1+2\gamma_n)}\,.$$

Ferner kann man aus diesem Grund für die Kugelfunktionen die asymptotische Formel (II, 47·2) verwenden und erhält

$$P_{\gamma_n-\frac{1}{2}}[\cos(\pi-\vartheta)] = \frac{e^{-i\gamma_n(\pi-\vartheta)+\frac{\pi i}{4}}}{\sqrt{2\pi\gamma_n\sin\vartheta}}\,.$$

Infolgedessen wird aus (5)

$$\Pi = \frac{2\sqrt{2\pi}\, e^{\frac{3}{4}\pi i}}{(k_1 a)^3 \sqrt{\sin\vartheta}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma_n^{\frac{1}{2}} e^{i\gamma_n\vartheta}}{N'_{\gamma_n-\frac{1}{2}}} \frac{\zeta^{(1)}_{\gamma_n-\frac{1}{2}}(k_1 b)}{\zeta^{(1)}_{\gamma_n-\frac{1}{2}}(k_1 a)} \sum_{m=0}^{\infty} e^{m\pi i(1+2\gamma_n)}.$$

Weil $\Re\left(\frac{\gamma_n}{i}\right)$ sehr groß ist, kann man in der zweiten Summe die Glieder mit $m > 0$ gegenüber dem ersten vernachlässigen und erhält schließlich als Gesamtwirkung

$$\Pi = \frac{2\sqrt{2\pi}. e^{\frac{3}{4}\pi i}}{(k_1 a)^3 \sqrt{\sin\vartheta}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\zeta^{(1)}_{\gamma_n-\frac{1}{2}}(k_1 b)}{\zeta^{(1)}_{\gamma_n-\frac{1}{2}}(k_1 a)} \frac{\gamma_n^{\frac{1}{2}} e^{i\gamma_n\vartheta}}{N'_{\gamma_n-\frac{1}{2}}}.$$

Diese Formeln wurden von B. van der Pol und H. Bremmer[1]) zu ausführlichen Untersuchungen über die Ausbreitung der elektrischen Wellen beim Rundfunk verwendet.

§ 5. Höhere Kugelfunktionen.

34. Anziehungsgesetz im mehrdimensionalen Raum. Der Punkt M habe die rechtwinkligen Koordinaten (a, b, c), der Punkt P die Koordinaten (x, y, z), jeder von beiden habe die Masse 1. Ihre Entfernung ist

$$R = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}.$$

Sie ziehen sich nach dem Anziehungsgesetz der Mechanik mit der Kraft $\frac{k^2}{R^2}$ an, wenn k^2 die Gravitationskonstante bedeutet. Das Potential dieser Kraft ist $V = \frac{k^2}{R}$; es ist eine Lösung der Laplaceschen Differentialgleichung $\Delta V = 0$.

Die Aussage läßt sich auf n Veränderliche verallgemeinern. Setzen wir

$$R = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \cdots + (x_n - a_n)^2},$$

so genügt $\frac{1}{R^{n-2}}$ der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 V}{\partial x_n^2} = 0,$$

wie man leicht durch Rechnung bestätigt. Denn es ist

$$\frac{\partial \frac{1}{R^{n-2}}}{\partial x_m} = -\frac{(n-2)(x_m - a_m)}{R^n},$$

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{R^{n-2}}}{\partial x_m^2} = \frac{n(n-2)(x_m - a_m)^2}{R^{n+2}} - \frac{n-2}{R^n},$$

[1]) B. van der Pol und H. Bremmer, Phil. Mag. London, 7. Serie, 24 (1937) 141—176, 825—864.

somit

$$\sum_{m=1}^{n} \frac{\partial^2 \frac{1}{R^{n-2}}}{\partial x_m^2} = 0 .$$

An Stelle des Potentials $\frac{1}{R}$ im dreidimensionalen Raum tritt also $\frac{1}{R^{n-2}}$ im n-dimensionalen Raum.

Aus der Beziehung

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{\mu=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{n} (a_\mu x_\nu - a_\nu x_\mu)^2 \\ &= \sum_{\mu=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{n} (a_\mu^2 x_\nu^2 - 2 a_\mu x_\mu a_\nu x_\nu + a_\nu^2 x_\mu^2) \\ &= 2 \sum_{\mu=1}^{n} a_\mu^2 \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu^2 - 2 \sum_{\mu=1}^{n} a_\mu x_\mu \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu x_\nu , \end{aligned}$$

folgt

$$\left(\sum_{\mu=1}^{n} a_\mu x_\mu \right)^2 \leq \sum_{\mu=1}^{n} a_\mu^2 \sum_{\mu=1}^{n} x_\mu^2 ,$$

d. i. die CAUCHY-SCHWARZsche Ungleichung.

Setzen wir

$$r = \sqrt{\sum_{m=1}^{n} a_m^2} \quad \text{und} \quad r' = \sqrt{\sum_{m=1}^{n} x_m^2} ,$$

wobei $r, r' > 0$ sein soll, so ist daher

$$\frac{\left| \sum_{m=1}^{n} a_m x_m \right|}{r r'} \leq 1 ,$$

d. h. wir können

$$\xi = \cos \vartheta = \frac{\sum_{m=1}^{n} a_m x_m}{r r'}$$

mit reellem ϑ schreiben. Damit wird aber

$$R = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2 r r' \cos \vartheta}$$

oder

$$R = r \sqrt{1 - 2\alpha \xi + \alpha^2} ,$$

wenn wir wieder wie in (I·10) $\alpha = \frac{r'}{r}$ setzen. Das Potential im n-dimensionalen Raum läßt sich dann schreiben

$$\frac{1}{R^{n-2}} = \frac{1}{r^{n-2}} (1 - 2\alpha \xi + \alpha^2)^{-\left(\frac{n}{2} - 1\right)} .$$

35. Entwicklung einer Potenz der reziproken Entfernung nach höheren Kugelfunktionen. Durch die Überlegungen der vorigen Ziffer kommen wir dazu, $(1-2\alpha\xi+\alpha^2)^{-\nu}$ nach Potenzen von α zu entwickeln, wobei ν eine beliebige reelle Zahl bedeutet. Setzen wir $|\alpha|$ hinreichend klein und $|\xi|$ beschränkt voraus, so ergibt sich

$$(1)\qquad (1-2\alpha\xi+\alpha^2)^{-\nu}=[1-(2\alpha\xi-\alpha^2)]^{-\nu}$$
$$=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\nu(\nu+1)\cdots(\nu+k-1)}{k!}(2\alpha\xi-\alpha^2)^k$$
$$=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\nu(\nu+1)\cdots(\nu+k-1)}{k!}\Bigg[(2\xi)^k\alpha^k$$
$$+\sum_{\lambda=1}^{k}(-1)^\lambda\frac{k(k-1)\cdots(k-\lambda+1)}{\lambda!}(2\xi)^{k-\lambda}\alpha^{k+\lambda}\Bigg]$$
$$=1+\sum_{k=1}^{\infty}\Bigg[\frac{\nu(\nu+1)\cdots(\nu+k-1)}{k!}(2\xi)^k$$
$$-\frac{\nu(\nu+1)\cdots(\nu+k-2)}{(k-2)!\,1!}(2\xi)^{k-2}+\frac{\nu(\nu+1)\cdots(\nu+k-3)}{(k-4)!\,2!}(2\xi)^{k-4}-\cdots\Bigg]\alpha^k.$$

Wir bezeichnen mit L. GEGENBAUER[1]) den Koeffizienten von α^k mit $C_k^\nu(\xi)$. E. HEINE nennt diese Funktionen höhere Kugelfunktionen. Sie gehen für $\nu=\frac{1}{2}$ in die gewöhnlichen LEGENDREschen Polynome über. Zum ersten Male werden sie von JACOBI[2]) erwähnt. Nach (II·4) ist

$$C_k^\nu(\xi)=\sum_{s=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]}\frac{(-1)^s\,\Gamma(\nu+k-s)}{s!\,(k-2s)!\,\Gamma(\nu)}(2\xi)^{k-2s}.$$

$\left[\frac{k}{2}\right]$ bedeutet die größte ganze Zahl $\leqq\frac{k}{2}$, $0!=1$. Mit Hilfe von (II·8) hat man daher

$$(2)\qquad C_{2k}^\nu(\xi)=\sum_{s=0}^{k}\frac{(-1)^s\,\Gamma(\nu+2k-s)}{s!\,(2k-2s)!\,\Gamma(\nu)}(2\xi)^{2k-2s}$$
$$=\frac{(-1)^k\,\Gamma(\nu+k)}{k!\,\Gamma(\nu)}+\frac{(-1)^{k-1}\,\Gamma(\nu+k+1)}{(k-1)!\,2!\,\Gamma(\nu)}(2\xi)^2$$
$$+\frac{(-1)^{k-2}\,\Gamma(\nu+k+2)}{(k-2)!\,4!\,\Gamma(\nu)}(2\xi)^4+\cdots$$
$$=\frac{(-1)^k\,\Gamma(\nu+k)}{k!\,\Gamma(\nu)}\Bigg[1-\frac{(\nu+k)k}{2!}(2\xi)^2$$
$$+\frac{(\nu+k)(\nu+k+1)k(k-1)}{4!}(2\xi)^4-\cdots\Bigg]$$
$$=\frac{(-1)^k\,\Gamma(\nu+k)}{k!\,\Gamma(\nu)}F\left(\nu+k,\,-k,\,\frac{1}{2},\,\xi^2\right)$$

---

[1]) L. GEGENBAUER, S.-B. Akad. Wien, Math. nat. Kl. IIa, 75 (1877) 891—905; 102 (1893) 942—950.

[2]) C. G. J. JACOBI, J. reine angew. Math. 56 (1859) 149 oder Werke, Bd. 6, S. 184.

und

(3) $$C_{2k+1}^{\nu}(\xi) = \sum_{s=0}^{k} \frac{(-1)^s \Gamma(\nu + 2k + 1 - s)}{s!\,(2k + 1 - 2s)!\,\Gamma(\nu)} (2\,\xi)^{2k+1-2s}$$

$$= \frac{(-1)^k \Gamma(\nu + k + 1)}{k!\,1!\,\Gamma(\nu)} 2\xi + \frac{(-1)^{k-1} \Gamma(\nu + k + 2)}{(k - 1)!\,3!\,\Gamma(\nu)} (2\,\xi)^3$$

$$+ \frac{(-1)^{k-2} \Gamma(\nu + k + 3)}{(k - 2)!\,5!\,\Gamma(\nu)} (2\,\xi)^5 + \cdots$$

$$= \frac{(-1)^k \Gamma(\nu + k + 1)}{k!\,\Gamma(\nu)} 2\,\xi \Big[1 - \frac{(\nu + k + 1)\,k}{3!} (2\,\xi)^2$$

$$+ \frac{(\nu + k + 1)(\nu + k + 2)\,k\,(k - 1)}{5!} (2\,\xi)^4 - \cdots\Big]$$

$$= \frac{(-1)^k \Gamma(\nu + k + 1)}{k!\,\Gamma(\nu)} 2\,\xi\, F\left(\nu + k + 1, -k, \frac{3}{2}, \xi^2\right).$$

36. Rekursionsformeln. $(1 - 2\alpha\,\xi + \alpha^2)^{-\nu}$ ist für $0 \leqq \vartheta \leqq \pi$, wobei $\xi = \cos\vartheta$, in einer genügend kleinen Umgebung von $\alpha = 0$ eine analytische Funktion von α und ξ, die Reihe

(1) $$(1 - 2\alpha\,\xi + \alpha^2)^{-\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{\nu}(\xi)\,\alpha^n$$

konvergiert daher in dem genannten Bereich gleichmäßig bezüglich α und ξ. Die Koeffizienten $C_n^{\nu}(\xi)$ sind Polynome n-ten Grades in ξ, wie wir in der vorigen Ziffer gesehen haben, und enthalten nur gerade bzw. nur ungerade Potenzen von ξ, je nachdem n gerade oder ungerade ist. Insbesondere ist

$$C_0^{\nu}(\xi) = 1, \quad C_1^{\nu}(\xi) = 2\nu\,\xi.$$

Es ist

$$(1 - 2\alpha\,\xi + \alpha^2)^{-\nu} = (1 - 2\alpha\,\xi + \alpha^2)^{-\nu-1}\,(1 - 2\alpha\,\xi + \alpha^2),$$

daher erhält man aus (1) durch Koeffizientenvergleichung

(2) $$C_n^{\nu}(\xi) = C_n^{\nu+1}(\xi) - 2\,\xi\,C_{n-1}^{\nu+1}(\xi) + C_{n-2}^{\nu+1}(\xi);$$

ferner gilt

$$\frac{\partial (1 - 2\alpha\,\xi + \alpha^2)^{-\nu}}{\partial\alpha} = 2\nu(\xi - \alpha)\,(1 - 2\alpha\,\xi + \alpha^2)^{-(\nu+1)},$$

somit wegen (1) auch

(3) $$(n + 1)\,C_{n+1}^{\nu}(\xi) = 2\,\nu\,[\xi\,C_n^{\nu+1}(\xi) - C_{n-1}^{\nu+1}(\xi)],$$

schließlich

$$\frac{\partial (1 - 2\alpha\,\xi + \alpha^2)^{-\nu}}{\partial\xi} = 2\nu\alpha(1 - 2\alpha\,\xi + \alpha^2)^{-(\nu+1)},$$

also

(4) $$\frac{dC_n^\nu(\xi)}{d\xi} = 2\nu C_{n-1}^{\nu+1}(\xi).$$

Aus (3) erhält man

$$\xi C_{n-1}^{\nu+1}(\xi) = C_{n-2}^{\nu+1}(\xi) + \frac{n}{2\nu} C_n^\nu(\xi),$$

somit aus (2)

$$C_n^\nu(\xi) = C_n^{\nu+1}(\xi) - C_{n-2}^{\nu+1}(\xi) - \frac{n}{\nu} C_n^\nu(\xi)$$

oder

(5) $$C_n^{\nu+1}(\xi) - C_{n-2}^{\nu+1}(\xi) = \frac{n+\nu}{\nu} C_n^\nu(\xi).$$

(3) und (5) lassen sich schreiben

(6) $$\begin{cases} 2\nu\,\xi C_{n-1}^{\nu+1}(\xi) - n\, C_n^\nu(\xi) - 2\nu C_{n-2}^{\nu+1}(\xi) = 0, \\ \nu C_n^{\nu+1}(\xi) - (n+\nu)\, C_n^\nu(\xi) - \nu C_{n-2}^{\nu+1}(\xi) = 0. \end{cases}$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich, wenn wir $C_{n-2}^{\nu+1}(\xi)$ wegschaffen,

(7) $$C_n^{\nu+1}(\xi) - \xi C_{n-1}^{\nu+1}(\xi) = \frac{n+2\nu}{2\nu} C_n^\nu(\xi).$$

Schaffen wir dagegen $C_n^\nu(\xi)$ weg, so erhalten wir

(8) $$nC_n^{\nu+1}(\xi) - 2(n+\nu)\,\xi C_{n-1}^{\nu+1}(\xi) + (n+2\nu) C_{n-2}^{\nu+1}(\xi) = 0.$$

Wir schreiben jetzt in der zweiten Gleichung (6) $n-1$ statt n, multiplizieren sie mit 2 und addieren sie dann zu der mit $-\xi$ multiplizierten ersten Gleichung (6). Damit ergibt sich

(9) $$2\nu(1-\xi^2)\, C_{n-1}^{\nu+1}(\xi) + n\,\xi C_n^\nu(\xi) - 2(n+\nu-1) C_{n-1}^\nu(\xi) \\ + 2\nu\,\xi C_{n-2}^{\nu+1}(\xi) - 2\nu\, C_{n-3}^{\nu+1}(\xi) = 0.$$

Da aber nach der ersten Gleichung (6)

$$2\nu\,\xi C_{n-2}^{\nu+1}(\xi) = (n-1) C_{n-1}^\nu(\xi) + 2\nu C_{n-3}^{\nu+1}(\xi)$$

ist, wird aus (9)

(10) $$2\nu(1-\xi^2) C_{n-1}^{\nu+1}(\xi) + n\,\xi C_n^\nu(\xi) - (n+2\nu-1) C_{n-1}^\nu(\xi) = 0.$$

Wir differenzieren (10) nach ξ und ersetzen die Differentialquotienten der höheren Kugelfunktionen gemäß Gleichung (4). Damit erhalten wir

$$-4\nu\xi C_{n-1}^{\nu+1}(\xi) + 2\nu(1-\xi^2)\, 2(\nu+1) C_{n-2}^{\nu+2}(\xi) \\ + nC_n^\nu(\xi) + n\,\xi\cdot 2\nu C_{n-1}^{\nu+1}(\xi) - (n+2\nu-1)\, 2\nu C_{n-2}^{\nu+1}(\xi) = 0$$

oder, wenn wir $2\nu C_{n-2}^{\nu+1}(\xi)$ aus der ersten Gleichung (6) einsetzen,

$$4\nu(\nu+1)(1-\xi^2)C_{n-2}^{\nu+2}(\xi) - 4\nu\xi C_{n-1}^{\nu+1}(\xi)$$
$$+ nC_n^\nu(\xi) + 2n\nu\xi C_{n-1}^{\nu+1}(\xi)$$
$$-(n+2\nu-1)\,[2\nu\xi C_{n-1}^{\nu+1}(\xi) - nC_n^\nu(\xi)] = 0\,,$$

somit

$$(11)\quad 4\nu(\nu+1)(1-\xi^2)C_{n-2}^{\nu+2}(\xi) - 2\nu(2\nu+1)\xi C_{n-1}^{\nu+1}(\xi) + n(n+2\nu)C_n^\nu(\xi) = 0.$$

Aus dieser Gleichung folgt mit Hilfe von (4)

$$(12)\qquad (1-\xi^2)\frac{d^2C_n^\nu(\xi)}{d\xi^2} - (2\nu+1)\xi\frac{dC_n^\nu(\xi)}{d\xi} + n(n+2\nu)C_n^\nu(\xi) = 0.$$

37. Berechnung der höheren Kugelfunktionen. Aus der Gleichung (8) der vorigen Ziffer erhält man

$$C_{n-2}^{\nu+1}(\xi) = \frac{-nC_n^{\nu+1}(\xi) + 2(n+\nu)\xi C_{n-1}^{\nu+1}(\xi)}{n+2\nu}$$

oder mit Hilfe von (36·5)

$$(1)\qquad C_n^{\nu+1}(\xi)\left(1+\frac{n}{n+2\nu}\right) - \frac{2(n+\nu)}{n+2\nu}\xi C_{n-1}^{\nu+1}(\xi) = \frac{n+\nu}{\nu}C_n^\nu(\xi)\,.$$

Wir addieren dazu die mit $-\frac{(n+\nu)\xi}{\nu(n+2\nu)}$ multiplizierte Gleichung (36·3) und erhalten

$$\frac{2(n+\nu)}{n+2\nu}(1-\xi^2)C_n^{\nu+1}(\xi) = \frac{n+\nu}{\nu}C_n^\nu(\xi) - \frac{(n+1)(n+\nu)}{\nu(n+2\nu)}\xi C_{n+1}^\nu(\xi)$$

oder

$$(2)\qquad 2\nu(1-\xi^2)C_n^{\nu+1}(\xi) = (n+2\nu)C_n^\nu(\xi) - (n+1)\xi C_{n+1}^\nu(\xi)\,.$$

Mit Hilfe dieser Gleichung können wir alle $C_n^\nu(\xi)$ für positive ganzzahlige ν berechnen, wenn wir alle $C_n^1(\xi)$ kennen. Diese erhalten wir in folgender Weise: Es ist für $|\alpha| < 1$

$$-\ln(1-2\alpha\cos\vartheta+\alpha^2) = -[\ln(1-\alpha e^{i\vartheta}) + \ln(1-\alpha e^{-i\vartheta})]$$
$$= 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^n\cos n\vartheta}{n}\,,$$

somit, wenn wir nach $\xi = \cos\vartheta$ differenzieren,

$$\frac{2\alpha}{1-2\alpha\cos\vartheta+\alpha^2} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^n\frac{\sin n\vartheta}{\sin\vartheta}$$

(weil $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n}\cos n\vartheta$ und $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^n\sin n\vartheta$ für $0 \leqq \vartheta \leqq \pi$ gleichmäßig in ϑ konvergieren, kann man gliedweise differenzieren), oder

$$(1-2\alpha\cos\vartheta+\alpha^2)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n\frac{\sin(n+1)\vartheta}{\sin\vartheta}\,,$$

daher

(3) $$C_n^1(\cos\vartheta) = \frac{\sin(n+1)\vartheta}{\sin\vartheta}.$$

Ferner ist

$$\frac{1-\alpha\cos\vartheta}{1-2\alpha\cos\vartheta+\alpha^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\alpha e^{i\vartheta}} + \frac{1}{1-\alpha e^{-i\vartheta}}\right) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \cos n\vartheta,$$

somit durch Koeffizientenvergleichung

(4) $$C_n^1(\cos\vartheta) - \cos\vartheta\cdot C_{n-1}^1(\cos\vartheta) = \cos n\vartheta.$$

Mit Hilfe von Gleichung (2) läßt sich $C_n^\nu(\cos\vartheta)$ linear homogen durch $C_n^1(\cos\vartheta)$ und $C_{n+1}^1(\cos\vartheta)$, also nach (3) und (4) linear homogen durch $\frac{\sin(n+1)\vartheta}{\sin\vartheta}$ und $\cos(n+1)\vartheta$ darstellen. Als Koeffizienten treten rationale Funktionen von $\cos\vartheta$ mit rationalen Zahlenkoeffizienten auf.

Ist $\nu = k + \frac{1}{2}$ (k positive ganze Zahl), so folgt aus

$$(1-2\alpha\xi+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\xi)\alpha^n$$

(siehe I, 10·1) durch k-malige Differentiation nach ξ gemäß den Überlegungen von (I·12)

$$1\cdot 3\cdots(2k-1)\alpha^k(1-2\alpha\xi+\alpha^2)^{-\left(k+\frac{1}{2}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(k)}(\xi)\alpha^n,$$

somit nach (I, 18·2) durch Koeffizientenvergleichung

$$C_{n-k}^{k+\frac{1}{2}}(\xi) = \frac{P_n^{(k)}(\xi)}{1\cdot 3\cdots(2k-1)} = \frac{(-1)^k P_n^k(\xi)}{1\cdot 3\cdots(2k-1)(1-\xi^2)^{\frac{k}{2}}}.$$

38. Differentialgleichung der höheren Kugelfunktionen. Nach (36·12) genügen die höheren Kugelfunktionen der Differentialgleichung

$$(1-x^2)y'' - (2\nu+1)xy' + n(n+2\nu)y = 0.$$

Wir machen den Ansatz $y = \sum_{\lambda=0}^{\infty} c_\lambda x^\lambda$ und erhalten

$$\Sigma(1-x^2)\lambda(\lambda-1)\,c_\lambda x^{\lambda-2} - \Sigma(2\nu+1)\lambda c_\lambda x^\lambda + \Sigma n(n+2\nu)c_\lambda x^\lambda = 0,$$

daher

$$[-\lambda(\lambda-1) - (2\nu+1)\lambda + n(n+2\nu)]\,c_\lambda + (\lambda+1)(\lambda+2)c_{\lambda+2} = 0$$

oder

$$c_{\lambda+2} = c_\lambda\frac{\lambda(\lambda+2\nu) - n(n+2\nu)}{(\lambda+1)(\lambda+2)} = c_\lambda\frac{(\lambda-n)(\lambda+n+2\nu)}{(\lambda+1)(\lambda+2)}.$$

Damit ergibt sich für $c_0 = 1$, $c_1 = 0$ die Lösung

$$(1) \qquad 1 - \frac{(2\nu + n)\,n}{2!}\,x^2 + \frac{(2\nu + n)(2\nu + n + 2)\,n\,(n-2)}{4!}\,x^4 - \cdots$$

für $c_0 = 0$, $c_1 = 1$ die Lösung

$$(2) \qquad x - \frac{(2\nu + n + 1)(n-1)}{3!}\,x^3 + \frac{(2\nu + n + 1)(2\nu + n + 3)(n-1)(n-3)}{5!}\,x^5 - \cdots$$

Die erste stimmt für $n = 2k$ bis auf den Faktor $\frac{(-1)^k}{k!}\nu(\nu+1)\cdots(\nu+k-1)$ mit $C_{2k}^{\nu}(x)$, die zweite für $n = 2k+1$ bis auf den Faktor $\frac{(-1)^k}{k!}\,2\,\nu(\nu+1)\cdots(\nu+k)$ mit $C_{2k+1}^{\nu}(x)$ aus Ziffer 35 überein.

Um noch eine zweite von diesen linear unabhängige Lösung zu erhalten, setzen wir an $y = \sum_{\lambda=0}^{\infty} c_\lambda x^{\beta-\lambda}$, womit sich ergibt

$$\Sigma(1-x^2)(\beta-\lambda)(\beta-\lambda-1)c_\lambda x^{\beta-\lambda-2} - \Sigma(2\nu+1)(\beta-\lambda)c_\lambda x^{\beta-\lambda} + \Sigma n(n+2\nu)c_\lambda x^{\beta-\lambda} = 0\,,$$

daher

$$(3) \qquad (\beta-\lambda+2)(\beta-\lambda+1)c_{\lambda-2} + [-(\beta-\lambda)(\beta-\lambda-1) - (2\nu+1)(\beta-\lambda) + n(n+2\nu)]c_\lambda = 0\,.$$

Vergleichen wir die Koeffizienten von x^β, so folgt

$$-\beta(\beta-1) - (2\nu+1)\beta + n(n+2\nu) = 0$$

oder

$$\beta^2 + 2\nu\beta - n(n+2\nu) = 0\,,$$

daher $\beta = n$ oder $\beta = -n-2\nu$. Für $\beta = n$ erhalten wir aus (3) Polynomlösungen, d. h. wieder (1) oder (2); der zweite Wert von β dagegen gibt

$$c_\lambda = \frac{(n+2\nu-2+\lambda)(n+2\nu-1+\lambda)\,c_{\lambda-2}}{(n+2\nu+\lambda)(n+2\nu+\lambda+1) - (2\nu+1)(n+2\nu+\lambda) - n(n+2\nu)}$$

oder

$$c_{\lambda+2} = \frac{(n+2\nu+\lambda)(n+2\nu+\lambda+1)}{(\lambda+2)(2n+2\nu+\lambda+2)}\,c_\lambda,$$

somit für $c_0 = 1$ und $c_1 = 0$ nach (II·8) die Lösung

$$\frac{1}{x^{n+2\nu}}\left[1 + \frac{(n+2\nu)(n+2\nu+1)}{2(2n+2\nu+2)\,x^2} + \frac{(n+2\nu)(n+2\nu+1)(n+2\nu+2)(n+2\nu+3)}{2\cdot 4\cdot(2n+2\nu+2)(2n+2\nu+4)\,x^4} + \cdots\right]$$

$$= \frac{1}{x^{n+2\nu}}\,F\left(\frac{n+2\nu}{2},\ \frac{n+2\nu+1}{2},\ n+\nu+1,\ \frac{1}{x^2}\right).$$

Diese Reihe konvergiert nach (II·9) für $|x| > 1$ und bricht nicht ab, falls $n + 2\nu$ keine negative ganze Zahl ist. In diesem Falle haben wir daher eine zweite linear unabhängige Lösung der Differentialgleichung gefunden.

Ist $\nu = 0$, so lautet die Differentialgleichung

$$(1 - x^2)\,y'' - x y' + n^2 y = 0$$

oder, wenn wir die Veränderliche ϑ durch $x = \cos\vartheta$ einführen, womit

$$y' = -\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{dy}{d\vartheta}$$

und

$$y'' = \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{d^2y}{d\vartheta^2} - \frac{\cos\vartheta}{\sin^3\vartheta}\frac{dy}{d\vartheta}$$

werden,

$$\frac{d^2y}{d\vartheta^2} + n^2 y = 0\,.$$

Als Lösung ergibt sich somit

$$y = A\cos n\vartheta + B\sin n\vartheta\,.$$

Nach Ziffer 35 ist $\lim\limits_{\nu\to 0}\Gamma(\nu)\,C_n^\nu(\cos\vartheta)$ analytisch und daher eine Lösung dieser Differentialgleichung; da diese Funktion ungeändert bleibt, wenn ϑ sein Zeichen ändert, muß daher

$$\lim_{\nu\to 0}\Gamma(\nu)\,C_n^\nu(\cos\vartheta) = A\cos n\vartheta$$

sein. Um A zu bestimmen, setzen wir $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, also $x = 0$, und erhalten für $n = 2k$ nach (35·2)

$$\lim_{\nu\to 0}\Gamma(\nu)\,C_{2k}^\nu(0) = \frac{(-1)^k}{k} = A(-1)^k,$$

somit

$$A = \frac{2}{n}$$

und für $n = 2k + 1$ nach (35·3), indem wir nach $\xi = \cos\vartheta$ differenzieren,

$$\lim_{\nu\to 0}\Gamma(\nu)\,C_{2k+1}^{\nu\,\prime}(0) = 2(-1)^k = A\,n(-1)^k,$$

somit wieder
$$A = \frac{2}{n},$$
daher allgemein

$$\lim_{\nu\to 0}\Gamma(\nu)\,C_n^\nu(\cos\vartheta) = \frac{2\cos n\vartheta}{n}\,.$$

Nach Ziffer 36 ist natürlich für jedes ϑ

$$C_0^0(\cos\vartheta) = 1\,.$$

39. Integraldarstellung. Wir führen in die Differentialgleichung für höhere Kugelfunktionen statt y die Veränderliche u durch die Gleichung

$$(1)\qquad y = (1-x^2)^{\frac{1}{2}-\nu}u$$

ein; dann ist

$$y' = (2\nu-1)x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}-\nu}u + (1-x^2)^{\frac{1}{2}-\nu}u',$$

$$y'' = (4\nu^2-1)x^2(1-x^2)^{-\frac{3}{2}-\nu}u + (2\nu-1)(1-x^2)^{-\frac{1}{2}-\nu}u$$
$$+ 2(2\nu-1)x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}-\nu}u' + (1-x^2)^{\frac{1}{2}-\nu}u'',$$

somit

$$(2)\qquad (1-x^2)u'' + (2\nu-3)xu' + (n+1)(n+2\nu-1)u = 0.$$

Wir wollen diese Differentialgleichung im Komplexen untersuchen. Wir setzen

$$(3)\qquad u = \int \frac{(1-t^2)^{n+\nu-\frac{1}{2}}}{(t-x)^{n+1}}\,dt,$$

indem wir dieses Integral über einen passenden Weg der komplexen t-Ebene erstrecken, der später bestimmt werden soll. Es ist

$$u' = (n+1)\int \frac{(1-t^2)^{n+\nu-\frac{1}{2}}}{(t-x)^{n+2}}\,dt,$$

$$u'' = (n+1)(n+2)\int \frac{(1-t^2)^{n+\nu-\frac{1}{2}}}{(t-x)^{n+3}}\,dt,$$

daher die linke Seite der Differentialgleichung

$$(4)\qquad (n+1)\int \frac{(1-t^2)^{n+\nu-\frac{1}{2}}}{(t-x)^{n+3}}\,[(n+2)(1-x^2) + (2\nu-3)x(t-x)$$
$$+ (n+2\nu-1)(t-x)^2]\,dt$$

$$= (n+1)\int \frac{(1-t^2)^{n+\nu-\frac{1}{2}}}{(t-x)^{n+3}}\,[n+2-(2n+2\nu+1)tx + (n+2\nu-1)t^2]\,dt$$

$$= -(n+1)\int \frac{d}{dt}\left[\frac{(1-t^2)^{n+\nu+\frac{1}{2}}}{(t-x)^{n+2}}\right]dt.$$

Erstrecken wir also das Integral über einen geschlossenen Weg C, der zuerst den Punkt $+1$ im positiven und hierauf den Punkt -1 im negativen Sinn umkreist, aber den Punkt x ausschließt, so nimmt $\dfrac{(1-t^2)^{n+\nu+\frac{1}{2}}}{(t-x)^{n+2}}$ nach Durchlaufung von C wieder seinen ursprünglichen Wert an, d. h. der Ausdruck (4) ist Null oder (3) ist Lösung der Differentialgleichung (2), somit

gemäß (1)

(5) $$(1-x^2)^{\frac{1}{2}-\nu}\int\limits_C \frac{(1-t^2)^{n+\nu-\frac{1}{2}}}{(t-x)^{n+1}}\,dt$$

Lösung der Differentialgleichung der höheren Kugelfunktionen.

Ist n eine positive ganze Zahl, so können wir für C auch eine Kurve wählen, die den Punkt x im positiven Sinn umkreist und die Punkte $+1$ und -1 ausschließt. Damit ergibt sich aber aus (5) nach dem CAUCHYschen Integralsatz

(6) $$(1-x^2)^{\frac{1}{2}-\nu}\frac{d^n(1-x^2)^{n+\nu-\frac{1}{2}}}{dx^n}$$

als Lösung der Differentialgleichung der höheren Kugelfunktionen. (6) ist aber ein Polynom n-ten Grades in x, wie sich durch Ausführung der Differentiation herausstellt, daher nach den Entwicklungen der vorigen Ziffer proportional $C_n^\nu(x)$. Den Proportionalitätsfaktor erhält man durch Koeffizientenvergleichung.

Es ist nämlich für $|x|<1$

$$(1-x^2)^{n+\nu-\frac{1}{2}}$$
$$=1+\sum_{\lambda=1}^{\infty}(-1)^\lambda\frac{\left(n+\nu-\frac{1}{2}\right)\left(n+\nu-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(n+\nu+\frac{1}{2}-\lambda\right)}{\lambda!}\,x^{2\lambda},$$

daher beginnt $\frac{d^n(1-x^2)^{n+\nu-\frac{1}{2}}}{dx^n}$ für $n=2k$ mit

$$\frac{(-1)^k n!}{2^k k!}(2n+2\nu-1)(2n+2\nu-3)\cdots(n+2\nu+1).$$

Da $C_n^\nu(x)$ in diesem Fall gemäß (35·2) mit $\frac{(-1)^k}{k!}\nu(\nu+1)\cdots(\nu+k-1)$ beginnt, ist der Proportionalitätsfaktor

$$\frac{2^k\nu(\nu+1)\cdots(\nu+k-1)}{n!(2n+2\nu-1)(2n+2\nu-3)\cdots(n+2\nu+1)}$$
$$=\frac{2^n\nu(\nu+1)\cdots(\nu+n-1)}{n!(2n+2\nu-1)(2n+2\nu-2)\cdots(n+2\nu)}.$$

Für $n=2k-1$ beginnt der Differentialquotient mit

$$\frac{(-1)^k(n+1)!}{2^k k!}(2n+2\nu-1)(2n+2\nu-3)\cdots(n+2\nu)\,x,$$

$C_n^\nu(x)$ dagegen nach (35·3) mit

$$\frac{2(-1)^{k+1}}{(k-1)!}\nu(\nu+1)\cdots(\nu+k-1)\,x,$$

als Proportionalitätsfaktor ergibt sich daher

$$-\frac{k\nu(\nu+1)\cdots(\nu+k-1)\,2^{k+1}(\nu+k)(\nu+k+1)\cdots(\nu+n-1)\,2^{k-1}}{(n+1)!\,(2n+2\nu-1)(2n+2\nu-2)\cdots(n+2\nu)}$$

$$=-\frac{2^n\nu(\nu+1)\cdots(\nu+n-1)}{n!\,(2n+2\nu-1)(2n+2\nu-2)\cdots(n+2\nu)},$$

somit ist allgemein

$$C_n^\nu(x)=\frac{(-2)^n\nu(\nu+1)\cdots(\nu+n-1)(1-x^2)^{\frac{1}{2}-\nu}}{n!\,(2n+2\nu-1)(2n+2\nu-2)\cdots(n+2\nu)}\,\frac{d^n(1-x^2)^{n+\nu-\frac{1}{2}}}{dx^n};$$

für $\nu=\frac{1}{2}$ erhält man die Formel (I, 14·2).

40. Integraleigenschaften. Wir gehen von der Gleichung (36·11) aus:

$$4\nu(\nu+1)(1-x^2)C_{n-2}^{\nu+2}(x)-2\nu(2\nu+1)xC_{n-1}^{\nu+1}(x)+n(n+2\nu)C_n^\nu(x)=0$$

oder

$$-2\left(\nu+\frac{1}{2}\right)xC_{n-1}^{\nu+1}(x)+2(\nu+1)(1-x^2)C_{n-2}^{\nu+2}(x)=-\frac{n(n+2\nu)}{2\nu}C_n^\nu(x).$$

Wenn wir mit $(1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}}$ multiplizieren, erhalten wir mit Hilfe von (36·4)

$$\frac{d\left[(1-x^2)^{\nu+\frac{1}{2}}C_{n-1}^{\nu+1}(x)\right]}{dx}=-\frac{n(n+2\nu)}{2\nu}(1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}}C_n^\nu(x),$$

daher für $\nu>-\frac{1}{2}$ und positive ganzzahlige m und n

$$\int_{-1}^{+1}C_m^\nu(x)C_n^\nu(x)(1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}}dx=\left[-\frac{2\nu C_m^\nu(x)}{n(n+2\nu)}C_{n-1}^{\nu+1}(x)(1-x^2)^{\nu+\frac{1}{2}}\right]_{-1}^{+1}$$

$$+\frac{2\nu}{n(n+2\nu)}\int_{-1}^{+1}\frac{dC_m^\nu(x)}{dx}C_{n-1}^{\nu+1}(x)(1-x^2)^{\nu+\frac{1}{2}}dx$$

$$=\frac{2\nu\cdot2(\nu+1)}{n(n+2\nu)(n-1)(n+2\nu+1)}\int_{-1}^{+1}\frac{d^2C_m^\nu(x)}{dx^2}C_{n-2}^{\nu+2}(x)(1-x^2)^{\nu+\frac{3}{2}}dx$$

$$=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$=\frac{2^n\nu(\nu+1)\cdots(\nu+n-1)}{n!\,(n+2\nu)(n+2\nu+1)\cdots(2n+2\nu-1)}\int_{-1}^{+1}\frac{d^nC_m^\nu(x)}{dx^n}(1-x^2)^{n+\nu-\frac{1}{2}}dx.$$

Ist also $m<n$ oder, weil der Ausdruck in m und n symmetrisch ist, $m\neq n$, so erhält man die Orthogonalitätsbeziehung

(1) $$\int_{-1}^{+1}C_m^\nu(x)C_n^\nu(x)(1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}}dx=0.$$

Für $m=n$ dagegen ergibt sich, weil nach (35·1)

$$C_n^\nu(x)=\frac{2^n\nu(\nu+1)\cdots(\nu+n-1)}{n!}x^n+\cdots$$

ist,

$$\int_{-1}^{+1} [C_n^\nu(x)]^2 (1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}} dx$$

$$= \frac{[2^n \nu(\nu+1)\cdots(\nu+n-1)]^2}{n!\,(n+2\nu)(n+2\nu+1)\cdots(2n+2\nu-1)} \int_{-1}^{+1} (1-x^2)^{n+\nu-\frac{1}{2}} dx .$$

(II·7) und (II·4) liefern mit $x = 1 - 2t$

$$\int_{-1}^{+1} (1-x^2)^{n+\nu-\frac{1}{2}} dx = 2^{2n+2\nu} \int_0^1 [t(1-t)]^{n+\nu-\frac{1}{2}} dt$$

$$= 2^{2n+2\nu} B\left(n+\nu+\frac{1}{2}, n+\nu+\frac{1}{2}\right) = 2^{2n+2\nu} \frac{\left[\Gamma\left(n+\nu+\frac{1}{2}\right)\right]^2}{\Gamma(2n+2\nu+1)},$$

somit

$$(2) \qquad \int_{-1}^{+1} [C_n^\nu(x)]^2 (1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}} dx$$

$$= \frac{2^{4n+2\nu}[\nu(\nu+1)\cdots(\nu+n-1)]^2 \left[\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\left(\nu+\frac{3}{2}\right)\cdots\left(\nu+n-\frac{1}{2}\right)\right]^2 \left[\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\right]^2}{n!\,(2\nu+n)(2\nu+n+1)\cdots(2\nu+2n-1)(2\nu+1)(2\nu+2)\cdots(2\nu+2n)\,\Gamma(2\nu+1)}$$

$$= \frac{2^{2n+2\nu}[\nu(\nu+1)\cdots(\nu+n-1)]^2 (2\nu+1)(2\nu+3)\cdots(2\nu+2n-1)\left[\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\right]^2}{n!\,(2\nu+n)(2\nu+n+1)\cdots(2\nu+2n-1)(2\nu+2)(2\nu+4)\cdots(2\nu+2n)\,\Gamma(2\nu+1)}$$

$$= \frac{2^{n+2\nu}\nu^2(\nu+1)\cdots(\nu+n-1)(2\nu+1)(2\nu+3)\cdots(2\nu+2n-1)\left[\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\right]^2}{n!\,(2\nu+n)(2\nu+n+1)\cdots(2\nu+2n-1)(\nu+n)\,\Gamma(2\nu+1)}$$

$$= \frac{2^{2\nu+1}\nu^2(2\nu+1)(2\nu+2)\cdots(2\nu+2n-1)\left[\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\right]^2}{n!\,(2\nu+n)(2\nu+n+1)\cdots(2\nu+2n-1)(\nu+n)\,\Gamma(2\nu+1)}$$

$$= \frac{2^{2\nu+1}\nu^2(2\nu+1)(2\nu+2)\cdots(2\nu+n-1)\left[\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\right]^2}{n!\,(\nu+n)\,\Gamma(2\nu+1)}$$

$$= \frac{2^{2\nu+1}\nu^2\,\Gamma(2\nu+n)}{n!\,(\nu+n)} \left[\frac{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2\nu+1)}\right]^2$$

$$= \frac{2^{2\nu+1}\nu^2\,\Gamma(2\nu+n)}{n!\,(\nu+n)\,4\nu^2} \left[\frac{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2\nu)}\right]^2$$

$$= \frac{2^{2\nu-1}\,\Gamma(2\nu+n)}{n!\,(\nu+n)} \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2\nu-1}\,\Gamma(\nu)}\right]^2 = \frac{\pi\,\Gamma(2\nu+n)}{2^{2\nu-1} n!\,(\nu+n)\,[\Gamma(\nu)]^2}.$$

Für $\nu = \frac{1}{2}$ ergibt sich die Formel (I, 21·1). Wie bei den gewöhnlichen Kugelfunktionen kann man diese Orthogonalitätseigenschaften der Funktionen $C_n^\nu(x)$ zur Reihenentwicklung einer beliebigen Funktion nach den höheren Kugelfunktionen verwenden.

Namen- und Sachverzeichnis